

## Contrôle sur les inéquations

### Exercice 1 :

Résoudre l'inéquation suivante : 
$$\frac{(2+x)^2(3-x)}{1-4x} \leq 0$$

### Exercice 2 :

Résoudre les deux inéquations suivantes : 
$$\frac{1-x}{1+x} > 2 \quad \text{et} \quad \frac{-5x+3}{2x+1} \geq 2$$

### Exercice 3 :

Résoudre les deux équations suivantes : 
$$(2x-1)^2 > (x+3)^2 \quad \text{et} \quad (2-x)(3+x) < 2(3-2x)(2-x)$$

### Exercice 4 :

Résoudre les deux inéquations suivantes : 
$$\frac{4-x}{8-x} \leq \frac{1-3x}{2+x} \quad \text{et} \quad \frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+3}{2x+1}$$

On précisera, au préalable, les valeurs interdites.

### Exercice 5 :

Proposer une inéquation à résoudre sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des solutions est  $] -\infty ; 2 [ \cup ] 4 ; +\infty [$

### BONUS :

Résoudre : 
$$\frac{(x^{16} + 4x^2 + 9)(5x-3)^2(x-2)^2}{x-2} < 0$$

Résoudre :  $x^3 \leq x^2$

**CORRIGE - La Merci – Montpellier**

**Exercice 1 :**  $\frac{(2+x)^2(3-x)}{1-4x} \leq 0 \rightarrow$  valeur interdite :  $1-4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{4}$

$(2+x)^2 > 0$  ;  $3-x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$  ;  $1-4x > 0 \Leftrightarrow -4x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{4}$	$3$	$+\infty$
$(1+x)^2$	+	0	+	+	+
$5-x$	+	+	+	0	-
$1-2x$	+	+	0	-	-
<b>Q</b>	+	0	+	-	0

$$S = \{-2\} \cup \left] \frac{1}{4}; 3 \right]$$

**Exercice 2 :**  $\frac{x-1}{x+1} > 2 \rightarrow$  valeur interdite :  $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} > 2 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2(x+1)}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2(x+1)}{x+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1-2x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x+1} > 0 \end{aligned}$$

$-x-3 > 0 \Leftrightarrow -x > 3 \Leftrightarrow x < -3$  ;  $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$+\infty$
$-x-3$	+	0	-	-
$x+1$	-	-	0	+
<b>Q</b>	-	0	+	-

$$S = ]-3; -1[$$

$\frac{-5x+3}{2x+1} \geq 2 \rightarrow$  valeur interdite :  $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{-5x+3}{2x+1} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{-5x+3}{2x+1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+3-2(2x+1)}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+3-2(2x+1)}{2x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5x+3-4x-2}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9x+1}{2x+1} \geq 0 \end{aligned}$$

$-9x+1 > 0 \Leftrightarrow -9x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{9}$  ;  $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$+\infty$
$-9x+1$	+	+	0	-
$2x+1$	-	0	+	+
<b>Q</b>	-	+	0	-

$$S = \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{9} \right]$$

**Exercice 3 :**  $(2x-1)^2 > (x+3)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - (x+3)^2 > 0 \Leftrightarrow [(2x-1)+(x+3)][(2x-1)-(x+3)] > 0$   
 $\Leftrightarrow [2x-1+x+3][2x-1-x-3] > 0 \Leftrightarrow (3x+2)(x-4) > 0$

$3x+2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$  ;  $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		$4$	$+\infty$
$3x+2$	-	0	+		+
$x-4$	-		+	0	+
<b>Q</b>	+	0	-	0	+

$S = ]-\infty; -\frac{2}{3}[ \cup ]4; +\infty[$

$(2-x)(3+x) < 2(3-2x)(2-x) \Leftrightarrow (2-x)(3+x) - 2(3-2x)(2-x) < 0 \Leftrightarrow (2-x)[(3+x) - 2(3-2x)] < 0$   
 $\Leftrightarrow (2-x)[3+x-6+4x] < 0 \Leftrightarrow (2-x)(5x-3) < 0$

$2-x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$  ;  $5x-3 > 0 \Leftrightarrow 5x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{5}$		$2$	$+\infty$
$2-x$	+		+	0	-
$x-4$	-	0	+		+
<b>Q</b>	-	0	+	0	-

$S = ]-\infty; \frac{3}{5}[ \cup ]2; +\infty[$

**Exercice 4 :**  $\frac{4-x}{8-x} \leq \frac{1-3x}{2+x}$  : les valeurs interdites sont 8 et -2.

$\frac{4-x}{8-x} \leq \frac{1-3x}{2+x} \Leftrightarrow \frac{4-x}{8-x} - \frac{1-3x}{2+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(4-x)(2+x)}{(8-x)(2+x)} - \frac{(1-3x)(8-x)}{(2+x)(8-x)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{8+4x-2x-x^2}{(8-x)(2+x)} - \frac{8-x-24x+3x^2}{(2+x)(8-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8+4x-2x-x^2-8+x+24x-3x^2}{(8-x)(2+x)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{27x-4x^2}{(8-x)(2+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(27-4x)}{(8-x)(2+x)} \leq 0$

$27-4x > 0 \Leftrightarrow -4x > -27 \Leftrightarrow x < \frac{27}{4}$  ;  $8-x > 0 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$  ;  $2+x > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$\frac{27}{4}$	$8$	$+\infty$
$x$	-		0	+	+	+
$27-4x$	+	+		0	-	-
$8-x$	+	+		+	0	-
$2+x$	-	0	+	+	+	+
<b>Q</b>	+		-	0	+	0
					-	
						+

$$S = ]-2;0] \cup \left[ \frac{27}{4}; 8 \right[$$

$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+3}{2x+1}$  : les valeurs interdites sont  $-1$  et  $-0,5$ .

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+3}{2x+1} &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+3}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)(2x+1) - (x+3)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(4x^2 + 2x + 6x + 3) - (x^2 + x + 3x + 3)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 2x + 6x + 3 - x^2 - x - 3x - 3}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(3x+4)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$3x+4 > 0 \Leftrightarrow 3x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3} ; \quad x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 ; \quad 2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$+\infty$
x	-	-	-	-	0	+
3x+4	-	0	+	+	+	+
x+1	-	-	0	+	+	+
2x+1	-	-	0	+	+	+
Q	+	0	-	+	-	+

$$S = \left] -\infty; -\frac{4}{3} \right] \cup \left] -1; -\frac{1}{2} \right[ \cup [0; +\infty[$$

**Exercice 5 :** Proposer une inéquation à résoudre sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des solutions est  $]-\infty; 2[ \cup ]4; +\infty[$

Le tableau de variation est inversé, recherchez la solution la plus simple :

→ les crochets sont ouverts : strictement supérieur ou strictement inférieur à 0

→ cela ressemble à un produit de deux facteurs  $P_1$  et  $P_2$

x	$-\infty$	$2$	$4$	$+\infty$
$P_1 \times P_2$	+	0	-	+
$P_1$	-	0	-	+
$P_2$	-	0	+	+

On peut proposer :  $(x-2)(x-4) > 0$

**BONUS :**

Résoudre :  $\frac{(x^{16} + 4x^2 + 9)(5x-3)^2(x-2)^2}{x-2} < 0$

Précisez d'abord la valeur interdite : 2

$$\rightarrow (5x-3)^2 \geq 0$$

$$\rightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

$$\rightarrow x^{16} = (x^8)^2 \text{ donc } x^{16} \geq 0 \text{ et de même } 4x^{12} \geq 0 \text{ d'où : } x^{16} + 4x^{12} + 9 \geq 0$$

**Ce quotient est donc du signe du dénominateur :  $S = ]-\infty; 2[$**

Résoudre :  $x^3 \leq x^2$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) \leq 0$$

Or  $x^2 \geq 0$  pour tout réel  $x$

Donc la solution est donnée par :  $x-1 \leq 0$  soit  $x \leq 1$

$$S = ]-\infty; 1]$$