PROBABILITES

Le but de chapitre est de construire un modèle pour décrire les expériences aléatoires.
De telles expériences sont par exemple :

le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce de monnaie,
la carte obtenue en la tirant au hasard d'un jeu, le tirage du loto, etc...

Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654, à propos de la répartition des gains de chaque joueur lors de parties de cartes non terminées.

Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats qui nous sont parfois intuitivement évidents et que nous n'arrivons pas toujours à expliquer sont en fait faux ! Comme en témoigne l'exercice suivant :
Un homme rend visite à une famille ayant deux enfants. L'un des deux enfants, un garçon, entre dans la pièce, calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons.

I. VOCABULAIRE

a. Expérience aléatoire

C'est une expérience (ou épreuve) dont on connaît parfaitement les conditions de déroulement mais dont les résultats dépendent du **hasard**.

Exemple : Un lancer de dé à 6 faces non pipé constitue une expérience aléatoire.

b. Univers

L'ensemble de toutes les **issues** (**éventualités**, résultats possibles) d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou **univers des possibles**). On le note généralement **Ω**.

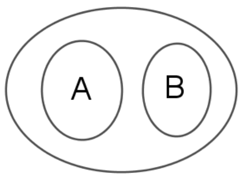
Exemple : Pour un lancer de dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

c. Evénement

Un **évènement** est une partie de l'univers.
Si cette partie ne contient qu'un seul élément, on parle d'**événement élémentaire**.

Exemple : on lance un dé à 6 faces :
A = « J'obtiens un nombre pair » = { 2 ; 4 ; 6 }.
$\varnothing$ = événement **impossible**.
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ = événement **certain**.

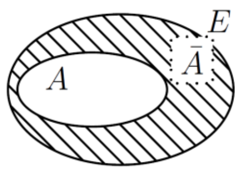
d. Evénements incompatibles



Deux événements n'ayant aucun élément en commun sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**).

Exemple : Avec un dé à six faces : les évènements
A = « Le nombre est pair » et B = « Le nombre est impair » sont incompatibles.

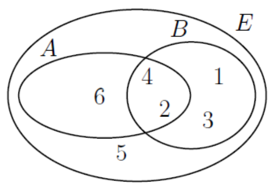
e. Evénement contraire



Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement **contraire** de A formé de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple : Avec un dé à six faces : Si A = { 3 } alors $\overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

f. Intersection d'évènements : « A et B »



Si A et B sont deux événements, on note **A ∩ B** (« A inter B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A **et** à B.

Exemple : Si A = { 2 ; 4 ; 6 } et B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 } alors $A \cap B = \{ 2 ; 4 \}$.

g. Union d'évènements : « A ou B »

Si A et B sont deux événements, on note **A ∪ B** (« A union B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux à la fois).

Exemple : Si A = { 2 ; 4 ; 6 } et B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 } alors $A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 \}$.

II. PROBABILITES SUR LES ENSEMBLES FINIS

On ne s'intéresse ici qu'à des expériences ayant un **nombre fini de résultats possibles**.
Donc Ω a aussi un nombre fini d'éléments (et à fortiori tous les événements, qui sont des parties de Ω) : on peut donc les compter.

a. Loi des grands nombres et probabilités

Propriété :
Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se stabilisent autour d'une valeur théorique lorsque n devient grand.
Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement A.

Exemple : On lance un dé équilibré et on note le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 4 :

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1 000	10 000	100 000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1 681	16 649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	$\frac{3}{10}=0{,}30$	0,20	0,19	0,152	0,161	0,168 1	0,166 49

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \simeq 0{,}1666...$.

La fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente. On note : $p(\{4\}) = \frac{1}{6}$.

b. Loi de probabilité :

Définition :
On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est **fini** et est formé de n issues :

$$\Omega = \{e_1 ; e_2 ; ... ; e_n\}$$

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque évènement élémentaire e_i sa probabilité p_i.
On la représente à l'aide d'un tableau :

Valeurs e_i	e_1	e_2	...	e_n
Probabilité p_i	p_1	p_2	...	p_n

Propriété : **La somme des probabilités élémentaires est égale à 1.**

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Exemple : Un urne contient 10 jetons :
→ deux jetons portent le n° 1 , trois jetons portent le n° 2 , cinq jetons portent le n° 3.
On tire un jeton au hasard et on note son numéro.
→ l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$
→ $p(\{1\}) = \frac{2}{10}$, $p(\{2\}) = \frac{3}{10}$ et $p(\{3\}) = \frac{5}{10}$

La loi de probabilité est :

Issue	1	2	3	Total
Probabilité	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{10}{10}$

→ La somme des probabilités est égale à 1.

Exemple : Si l'on lance un dé équilibré : $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6} \times 6 = 1$

c. Probabilité d'un évènement

Définition :
Un **évènement** est constitué de tous les évènements élémentaires qui le caractérisent.

A chaque événement A on associe un nombre appelé **probabilité de A**, noté **p(A)**, **compris entre 0 et 1,** égal à la **somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.**

Exemple : pour un dé équilibré à six faces :

$$p(\{2;4\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

La probabilité d'un événement qui se produit nécessairement (événement certain) est égale à 1.

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

La probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0.

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq p(A) \leq 1$.

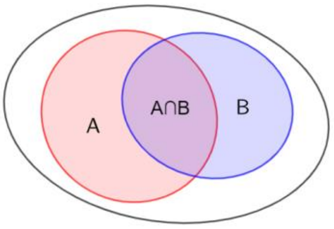
d. Propriétés des événements contraires

Propriété : Soit A un événement : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple : avec un dé équilibré à six faces, soit A l'évènement : « on obtient un 2 ou un 4 »

On a : $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc : $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

e. Propriété générale des probabilités : Formule de Poincaré



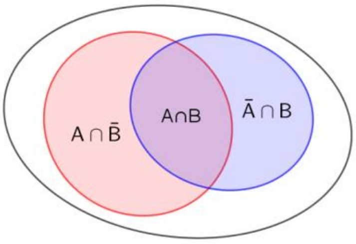
Propriété : Soit A et B deux événements :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Remarque :
Si A et B sont **incompatibles**, alors $A \cap B = \varnothing$, et $P(A \cap B) = 0$

Dans ce cas $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

e. Loi des probabilités totales :



$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$$

De même : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

III. EQUIPROBABILITE

Définition :
Si tous les événements élémentaires ou éventualités d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple : Si l'on lance un dé équilibré : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ et :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

Propriété :
Dans une situation **d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A** est égale au **quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.**

$$\boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{nombre d'éléments de A}}{\textbf{nombre d'éléments de }\boldsymbol{\Omega}}} \qquad \mathbf{p(A)} = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}}$$

On dit aussi : $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation A}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple : Une roue de casino non truquée est constituée de 40 cases : 18 rouges, 18 noires et 4 vertes.
La probabilité d'obtenir un numéro rouge est :

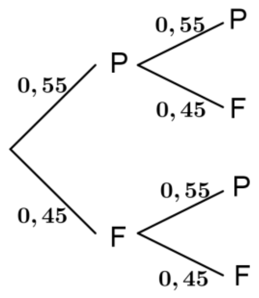
$$p = \frac{\text{nombre de cases rouges}}{\text{nombre total de cases}} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0,45$$

IV. REPETITION D'EXPERIENCES – ARBRE PONDERE

Il est commode de représenter une répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.

Propriété :
La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au **produit des probabilités écrites sur chaque branche de ce chemin.**

Exemple : Un enfant lance simultanément deux pièces de monnaie truquées :
→la probabilité d'avoir Pile est de 0,55 soit 55%.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 Pile, 1 Pile, 0 Pile ?



$$p(PP) = 0,55 \times 0,55 = 0,3025$$
$$p(PF \text{ ou } FP) = 0,55 \times 0,45 + 0,45 \times 0,55 = 0,495$$
$$p(FF) = 0,45 \times 0,45 = 0,2025$$

→on vérifie que $0,3025 + 0,495 + 0,2025 = 1$

V. TABLEAU A DOUBLE ENTREE

Si une expérience est le résultat de deux issues, il est recommandé d'utiliser un **tableau à double entrée** afin de bien identifier tous les évènements.

Exercice :
À l'occasion d'une cérémonie, un pâtissier confectionne un assortiment de 180 gâteaux composé d'éclairs au chocolat, d'éclairs au café, de religieuses au chocolat et de religieuses au café.
Les deux tiers de ces pâtisseries sont des éclairs.
On sait également qu'il y a 100 gâteaux au chocolat parmi lesquels un quart sont des religieuses.

1. À partir des indications de l'énoncé, compléter le tableau suivant :

	Chocolat	**Café**	**Total**
Éclairs	75	45	120
Religieuses	25	35	60
Total	100	80	180

2. Antoine choisit au hasard un gâteau parmi toutes les pâtisseries.
   Quelle est la probabilité qu'il s'agisse :
   1. d'un éclair au chocolat ?
   $$\frac{\text{nombre d'éclairs au chocolat}}{\text{nombre total de gateaux}} = \frac{75}{180} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \simeq 0,417$$
   2. d'une religieuse
   $$\frac{\text{nombre de religieuses}}{\text{nombre total de gateaux}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} \simeq 0,33$$
   3. d'une pâtisserie au café ?
   $$\frac{\text{nombre de pâtisseries au café}}{\text{nombre total de gateaux}} = \frac{80}{180} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \simeq 0,44$$
3. Bernard prend une pâtisserie au hasard. Sachant qu'il s'agit d'une religieuse, quelle est la probabilité que celle-ci soit au chocolat ?
   $$\frac{\text{nombre de religieuses au chocolat}}{\text{nombre total de religieuses}} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \simeq 0,417$$
4. Corentin a pris deux gâteaux au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils aient le même parfum ?

Tableau assez lourd :

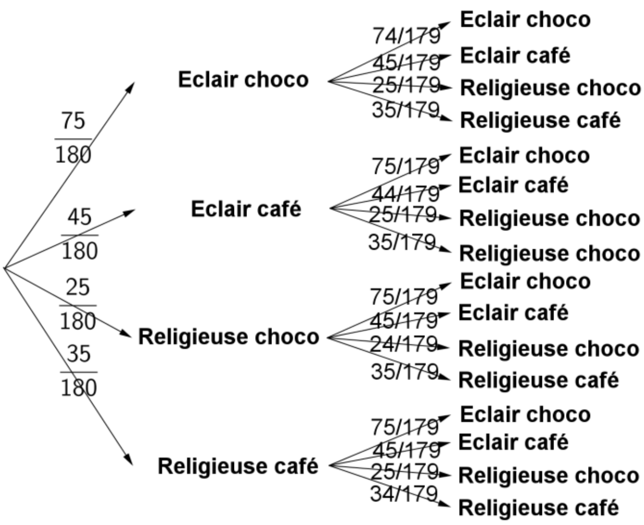
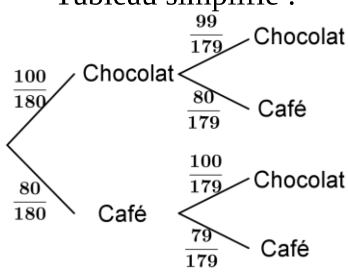


Tableau simplifié :



$$p = p\left(ChocoChoco\right) + p\left(CaféCafé\right)$$
$$= \frac{100}{180} \times \frac{99}{179} + \frac{80}{180} \times \frac{79}{179} = \frac{811}{1611} \simeq 0,503$$