Notre Dame de La Merci - *Montpellier*

Fiche 4B : Exercices sur les valeurs absolues

Définition

Ex 4B.1 : Ecrire sans barre de valeurs absolues : $|1-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$; $|5\sqrt{2}-7|$

Valeur absolue et distance

Ex 4B.2 : Interpréter en termes de distances les réels suivants :

$$\mathrm{A}=\left|x-\frac{7}{3}\right| \quad ; \quad \mathrm{B}=\left|x+\frac{3}{4}\right| \quad ; \quad \mathrm{C}=|-x-3| \quad ; \quad \mathrm{D}=|-7+2x|$$

conseil : partir de la définition : $|x-a|=d(x;a)$ *(distance de x à a)*

Ex 4B.3 : Ecrire les réels suivants sans la notation valeur absolue :

$$\mathrm{E}=|x+15| \quad ; \quad \mathrm{F}=|2x+1| \quad ; \quad \mathrm{G}=\left|\frac{4}{5}-x\right|$$

Equations avec la valeur absolue

Ex 4B.4 : Résoudre les équations suivantes

a) $|x|=7$ b) $|x-2|=0$ c) $|3x-1|=-1$

d) $\left|\frac{3}{2}-x\right|=4$ e) $|x-2|=2-x$ f) $\sqrt{(x+1)^2}=2$

g) $|4x-1|=|2x+3|$

conseil : si l'équation ne comporte qu'une valeur absolue, il est préférable d'interpréter celle-ci en terme de distance sinon on utilise un tableau de valeurs absolues

Valeurs absolues et intervalles

Ex 4B.5 : Compléter le tableau suivant, selon le modèle :

valeur absolue	distance	inégalité	intervalle
$\|x-1\|\leq 3$	$d(x;1)\leq 3$	$-2\leq x\leq 4$	$x\in[-2;4]$
$\|x+3\|\leq 2$			
	$d\left(x;\frac{1}{2}\right)<2$		
		$-1\leq x\leq 3$	
			$x\in]0;5[$
$\left\|x-\frac{2}{3}\right\|\geq\frac{1}{3}$			

Inéquations avec la valeur absolue

Ex 4B.6 : Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution S sous forme d'intervalle

a) $|x-2|\geq\frac{1}{2}$ b) $1\leq|x|\leq 2$ c) $|x+2|\leq -1$

d) $|-x+3|\geq 4$ e) $|x-1|\geq -1$ f) $|2-3x|+|5-x|\geq 1$

conseil : utiliser le même qu'à l'exo4 !

Ex 4B.1 : Ecrire sans barre de valeurs absolues :

$\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$ car $1-\sqrt{2}<0$ $\qquad$ $\left|\sqrt{3}-2\right|=2-\sqrt{3}$ car $\sqrt{3}-2<0$

$\left|5\sqrt{2}-7\right|=5\sqrt{2}-7$ car $5\sqrt{2}-7>0$

Valeur absolue et distance

Ex 4B.2 : Interpréter en termes de distances les réels suivants :

$$\mathrm{A}=\left|x-\frac{7}{3}\right|=d\left(x;\frac{7}{3}\right) \qquad \mathrm{B}=\left|x+\frac{3}{4}\right|=\left|x-\left(-\frac{3}{4}\right)\right|=d\left(x;-\frac{3}{4}\right)$$

$$\mathrm{C}=\left|-x-3\right|=\left|-(x+3)\right|=\left|x+3\right|=d\left(x;-3\right) \qquad \mathrm{D}=\left|-7+2x\right|=2\left|x-\frac{7}{2}=2\times d\left(x;\frac{7}{2}\right)\right|$$

Ex 4B.3 : Ecrire les réels suivants sans la notation valeur absolue :

$$\mathrm{E}=\left|x+15\right|=\begin{cases}x+15 & si\ \ x\geq -15\\ -x-15 & si\ \ x<-15\end{cases} \qquad \mathrm{F}=\left|2x+1\right|=\begin{cases}2x+1 & si\ \ x\geq -\frac{1}{2}\\ -2x-1 & si\ \ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\mathrm{G}=\left|\frac{4}{5}-x\right|=\begin{cases}\frac{4}{5}-x & si\ \ x\leq \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5}+x & si\ \ x>\frac{4}{5}\end{cases}$$

Equations avec la valeur absolue

Ex 4B.4 : Résoudre les équations suivantes

a) $|x|=7 \iff d(x;0)=7$ donc $x=7$ ou $x=-7$ $\qquad S=\{-7;7\}$

b) $|x-2|=0 \iff d(x;2)=0$ donc $x=0$ $\qquad S=\{0\}$

c) $|3x-1|=-1$ une valeur absolue ne peut jamais être négative $\qquad S=\varnothing$

d) $\left|\frac{3}{2}-x\right|=4 \iff d\left(\frac{3}{2};x\right)=4$ donc $x=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$ ou $x=\frac{3}{2}-4=-\frac{5}{2}$ $\qquad S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right\}$

e) $|x-2|=2-x$ on sait que $|x-2|=\begin{cases}x-2 & si\ x\geq 2\\ 2-x & si\ x<2\end{cases}$

Si $x\geq 2$, on obtient : $x-2=2-x \iff 2x=4 \iff x=\frac{4}{2}=2$

Si $x<2$, on obtient : $2-x=2-x$, ce qui est toujours vrai. Ainsi : $S=\left]-\infty;2\right]$.

f) $\sqrt{(x+1)^2}=2 \iff |x+1|=2 \iff d(x;-1)=2$

donc $x=-1+2=1$ ou $x=-1-2=-3$ $\qquad S=\{-3;1\}$

g) $|4x-1|=|2x+3| \iff |4x-1|-|2x+3|=0$

$4x-1>0 \iff x>\frac{1}{4}$ et $2x+3>0 \iff x>-\frac{3}{2}$

les valeurs charnières sont : $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$ ainsi on dresse un tableau de valeurs absolues :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$\|4x-1\|$		$1-4x$		$1-4x$	0	$4x-1$	
$\|2x+3\|$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\|4x-1\|-\|2x+3\|$		$4-2x$		$-6x-2$		$2x-4$	

puis on résout chaque équation sur son intervalle de définition :

$$4-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-2}=2 \quad \text{or} \quad 2 \notin \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$$

$$-6x-2=0 \Leftrightarrow -6x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} \in \left]-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right[$$

$$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2 \quad \text{et} \quad 2 \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$$

Ainsi : $S=\left\{-\frac{1}{3};2\right\}$

Valeurs absolues et intervalles

Ex 4B.5 :
Compléter le tableau suivant, selon le modèle :

valeur absolue	distance	inégalité	intervalle
$\|x-1\| \le 3$	$d(x;1) \le 3$	$-2 \le x \le 4$	$x \in [-2;4]$
$\|x+3\| \le 2$	$d(x;-3) \le 2$	$-5 \le x \le -1$	$x \in [-5;-1]$
$\left\|x-\frac{1}{2}\right\| < 2$	$d\left(x;\frac{1}{2}\right) < 2$	$-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$	$x \in \left]-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[$
$\|x-1\| < 2$	$d(x;1) < 2$	$-1 \le x \le 3$	$x \in [-1;3]$
$\left\|x-\frac{5}{2}\right\| < \frac{5}{2}$	$d\left(x;\frac{5}{2}\right) < \frac{5}{2}$	$0 < x < 5$	$x \in]0;5[$
$\left\|x-\frac{2}{3}\right\| \ge \frac{1}{3}$	$d\left(x;\frac{2}{3}\right) \ge \frac{1}{3}$	$x \le \frac{1}{3}$ ou $x \ge 1$	$x \in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup [1;+\infty[$

Inéquations avec la valeur absolue

Ex 4B.6 : Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution S sous forme d'intervalle

a) $|x-2| \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow d(x;2) \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

b) $1 \le |x| \le 2 \Leftrightarrow 1 \le d(x;0) \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2;-1] \cup [1;2]$

c) $|x+2| \le -1$ une valeur absolue ne peut être négative : $S=\varnothing$

d) $|-x+3| \ge 4 \Leftrightarrow |x-3| \ge 4 \Leftrightarrow d(x;3) \ge 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1] \cup [7;+\infty[$

e) $|x-1| \ge -1$ une valeur absolue est toujours positive : $S=\mathbb{R}$

f) $|2-3x|+|5-x| \ge 1$

$$2-3x>0 \Leftrightarrow -3x>-2 \Leftrightarrow x<\frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$$

$$5-x>0 \Leftrightarrow -x>-5 \Leftrightarrow x<-5\times(-1) \Leftrightarrow x<5$$

les valeurs charnières sont : $\frac{2}{3}$ et 5 ainsi on dresse un tableau de valeurs absolues :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert 2-3x\rvert$		$2-3x$		$3x-2$	0	$3x-2$	
$\lvert 5-x\rvert$		$5-x$	0	$5-x$		$x-5$	
$\lvert 2-3x\rvert+\lvert 5-x\rvert$		$7-4x$		$2x+3$		$4x-7$	

puis on résout chaque inéquation sur son intervalle de définition :

$$7-4x\geq 1 \iff -4x\geq -6 \iff x\leq \frac{-6}{-4} \iff x\leq \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow S_1=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cap\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$$

$$2x+3\geq 1 \iff 2x\geq -2 \iff x\geq \frac{-2}{2} \iff x\geq -1$$

$$\rightarrow S_2=\left[\frac{2}{3};5\right]\cap\left]-1;+\infty\right]=\left[\frac{2}{3};5\right]$$

$$4x-7\geq 1 \iff 4x\geq 8 \iff x\geq \frac{8}{4} \iff x\geq 2$$

$$\rightarrow S_3=\left[5;+\infty\right[\cap\left[2;+\infty\right[=\left[5;+\infty\right[$$

Ainsi : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};5\right]\cup\left[5;+\infty\right[=\mathbb{R}$