Résoudre ces inéquations en procédant de la façon suivante :

1. Déterminer la (les) valeur(s) interdite(s)
2. Se ramener à une inéquation dont le second membre est nul.
3. Ecrire toutes les expressions avec le même dénominateur.
4. Etudier le signe de chaque facteur puis dresser un tableau de signe.
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (en prenant soin d'exclure les valeurs interdites).

a. $\dfrac{2x^2+1}{3+x} < 2x$	**b.** $\dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{2x+5}{x-2} > 3$
c. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} > \dfrac{5}{(x+1)(x-1)}$	**d.** $\dfrac{x}{3x-1} \geq \dfrac{3x-1}{x}$

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER

a. $\dfrac{2x^2+1}{3+x} < 2x$

Valeurs interdites : $x \neq -3$

Ainsi : $\dfrac{2x^2+1}{3+x} - 2x < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+1}{3+x} - \dfrac{2x(3+x)}{(3+x)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+1-6x-2x^2}{3+x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-6x}{3+x} < 0$

$1-6x > 0 \Leftrightarrow -6x > -1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{6}$

$3+x > 0 \Leftrightarrow x > -3$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$1-6x$		+		+	0	−	
$3+x$		−	0	+		+	
$\dfrac{1-6x}{3+x}$		−	‖	+	0	−	

On doit résoudre : $\dfrac{1-6x}{3+x} < 0$

$S = \left]-\infty;-3\right[\cup \left]\dfrac{1}{6};+\infty\right[$

b. $\dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{2x+5}{x-2} > 3$

Valeurs interdites : $x \neq -1$ et $x \neq 2$

Ainsi : $\dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{2x+5}{x-2} - 3 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \dfrac{(2x+5)(x+1)}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{3(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-3x+6}{(x+1)(x-2)} + \dfrac{2x^2+2x+5x+5}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{3(x^2+x-2x-2)}{(x-2)(x+1)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x+11}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{3x^2+3x-6x-6}{(x-2)(x+1)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x+11-3x^2-3x+6x+6}{(x-2)(x+1)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x+17}{(x-2)(x+1)} > 0$

$5x+17 > 0 \Leftrightarrow 5x > -17 \Leftrightarrow x > -\dfrac{17}{5}$

$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

x		$-\frac{17}{5}$		-1		2	
$5x+17$	−	0	+		+		+
$x-2$	−		−		−	0	+
$x+1$	−		−	0	+		+
$Q(x)$	−	0	+	‖	−	‖	+

On doit résoudre : $\dfrac{5x+17}{(x-2)(x+1)} > 0$

$S = \left]-\dfrac{17}{5};-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

c. $$\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}>\frac{5}{(x+1)(x-1)}$$

Valeurs interdites : $\boldsymbol{x\neq -1}$ et $\boldsymbol{x\neq 1}$

Ainsi :

$$\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{5}{(x+1)(x-1)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3+2x+2-5}{(x+1)(x-1)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-6}{(x+1)(x-1)}>0$$

$$5x-6>0 \Leftrightarrow 5x>6 \Leftrightarrow x>\frac{6}{5}$$

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$$

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\boldsymbol{5x+6}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{x+1}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\boldsymbol{x-1}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On doit résoudre : $\dfrac{5x-6}{(x+1)(x-1)}>0$

$$S = \left]-1;1\right[\cup\left]\frac{6}{5};+\infty\right[$$

d. $$\frac{x}{3x-1}\geq\frac{3x-1}{x}$$

Valeurs interdites : $\boldsymbol{x\neq\frac{1}{3}}$ et $\boldsymbol{x\neq 0}$

Ainsi : $\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{3x-1}{x}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x\times x}{(3x-1)\times x}-\frac{(3x-1)(3x-1)}{x(3x-1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x(3x-1)}-\frac{(3x-1)^2}{x(3x-1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[x+(3x-1)][x-(3x-1)]}{x(3x-1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[x+3x-1][x-3x+1]}{x(3x-1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4x-1)(-2x+1)}{x(3x-1)}\geq 0$$

$$4x-1>0 \Leftrightarrow 4x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$$

$$-2x+1>0 \Leftrightarrow -2x>-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Pensez à gérer x

$$3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$

x		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$\boldsymbol{4x-1}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\boldsymbol{-2x+1}$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\boldsymbol{x}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\boldsymbol{3x-1}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$Q(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

On doit résoudre : $\dfrac{(4x-1)(-2x+1)}{x(3x-1)}\geq 0$

$$S = \left]0;\frac{1}{4}\right]\cup\left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$$