**Exercices sur les Statistiques**

## Moyenne

**Exo1 :** Dans un club sportif, le groupe des sauteurs à la perche est composé de 27 athlètes ; l'entraîneur a partagé ce groupe en deux :

- le groupe A composé des 10 athlètes qui sautent 5 mètres et plus,
- et le groupe B composé des 17 autres qui sautent moins de 5 mètres

1) La moyenne des performances du groupe A est 5,40 m, celle du groupe B est 4,60 m. Quelle est la moyenne des performances de l'ensemble des athlètes ?
2) Après quelques entraînements, la moyenne des performances du groupe A augmente de 10 cm, celle du groupe B augmente de 20 cm. De combien la moyenne de l'ensemble est-elle modifiée ?

**Exo2 :**
Dans l'entreprise A, il y a 100 ouvriers et 100 cadres et dans l'entreprise B, il y a 180 ouvriers et 20 cadres. Dans l'entreprise A (respectivement dans l'entreprise B) , le total des salaires mensuels des ouvriers est égal à 700 000$^F$ ( respectivement 1 350 000$^F$ ) et celui des cadres est 1 3000 000$^F$ ( respectivement 280 000$^F$).

1) Vérifier que les salaires mensuels moyens des ouvriers comme des cadres sont plus élevés dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.
2) Comparer le salaire mensuel moyen de l'ensemble des employés dans les entreprises A et B.

*Rremarque : cet exercice donne un exemple d' « effet de structure »*

## Quartiles

**Exo3 :** Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | 0 | 0,8 | 1 | 1,4 | 2 | 2,6 | 3 | 3,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 12 | 15 | 20 | 5 | 4 | 10 | 1 |

Déterminer le 1$^e$ et le 9$^e$ déciles de la série

**Exo4 :** Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

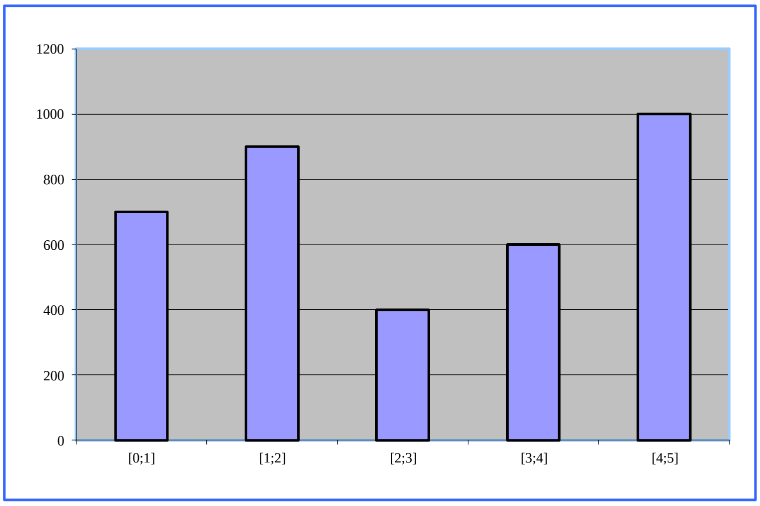
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 10 | 3 | 11 | 8 | 5 | 2 | 2 |

1) Déterminer la médiane $M_e$ et les quartiles $Q_1$ et $Q_3$.
2) Construire le diagramme en boîte

**Exo5 :**
Pendant 5 heures, on a recensé les véhicules qui se sont présentés à un péage d'autoroute, et on a présenté les résultats sur l'histogramme ci-contre.

On admet que la répartition est uniforme dans chaque classe.

Construire le diagramme en boîte représentant la répartition des véhicules



**Exo6 :** Comment sont modifiés les paramètres $M_e$, $Q_1$, $Q_3$, $D_1$ et $D_9$ d'une série de 100 notes à un examen dans chacun des cas suivants :

1) on augmente chaque note d'un point
2) on diminue chaque note de 10%
3) on augmente les 20 notes les plus basses d'un point

## Variance et écart-type

**Exo7 :** On a relevé, pour les élèves d'une classe de 1$^e$ , la distance du lycée à leurs domiciles et on a obtenu les résultats suivants ( arrondis au km ) :

| distance | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 4 |

1) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2) Quel est le mode de cette série ?
3) Un élève arrive en cours d'année, il habite à 250 km du lycée ; calculer les nouvelles valeurs des paramètres précédents

*Conseil : le mode est le caractère ayant le plus grand effectif*

**Exo8 :**
Les températures dans une ville de France, pour le mois de juillet 2001, sont en moyenne de 25°C et ont comme écart-type 5°C.
Dans une ville anglaise, la moyenne a été, pour la même période, de 69°F et l'écart-type de 16°F.

1) Sachant que y°F = 1,8 x°C + 32 , comparer les moyennes et les écart-types.
2) Que peut-on en conclure ?

**Exo9 :**
Voici la liste des gains (en francs) et le nombre de gagnants enregistrés pour le mercredi 23 mai 2001 au loto :

| gains | 3 175 250 | 75 380 | 3 890 | 210 | 115 | 25 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gagnants | 5 | 16 | 1 040 | 10 540 | 48 220 | 45 360 | 820 285 |

1) On veut estimer le nombre de grilles jouées ; la Française des jeux indique que 55% des mises des joueurs sont redistribuées aux gagnants ; sachant que la mise est de 2$^F$ , donner une estimation du nombre de grilles enregistrées.
2) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
3) Déterminer sa médiane et ses deux quartiles.

## Moyenne

### Exo1 :

1) Soit $\bar{x}$ la moyenne des performances de l'ensemble des athlètes , $\overline{x_A}$ et $\overline{x_B}$ celles des groupes A et B. On a :

$$\bar{x} = \frac{10\overline{x_A} + 17\overline{x_B}}{10+17} = \frac{10 \times 5,4 + 17 \times 4,6}{27} \simeq 4,90 \text{ mètres}$$

2) Soit on refait le même travail avec les nouvelles moyennes de chaque groupe,
Soit on utilise la linéarité de la moyenne :

$$\overline{x_2} = \bar{x} + \frac{10 \times 0,1 + 17 \times 0,2}{27} \simeq 4,90 + \frac{4,4}{27} \simeq 5,06 \text{ mètres}$$

**La moyenne de l'ensemble a donc augmenté de 16 cm.**

### Exo2 :

Dans l'entreprise A, soit $S_{OA}$, $S_{CA}$ et $S_{EA}$ les salaires mensuels des ouvriers, des cadres et de l'ensemble.
Dans l'entreprise B, soit $S_{OB}$, $S_{CB}$ et $S_{EB}$ les salaires mensuels des ouvriers , des cadres et de l'ensemble.

1) On a : $S_{OA} = \frac{700\,000}{100} = 7\,000$ F $\qquad S_{CA} = \frac{1\,300\,000}{100} = 13\,000$ F

$S_{OB} = \frac{1\,350\,000}{180} = 7\,500$ F $\qquad S_{CB} = \frac{280\,000}{20} = 14\,000$ F

Donc $S_{OB} > S_{OA}$ **et** $S_{CB} > S_{CA}$

2) $G = 3175\,250 \times 5 + 75\,380 \times 16 + 3890 \times 1040 + 210 \times 10\,540 + 25 \times 45\,360 + 12 \times 820\,285$ F.

$$S_{EB} = \frac{180 \times 7\,500 + 20 \times 14\,000}{180+20} = \frac{1\,350\,000 + 280\,000}{200} = \frac{1\,630\,000}{200} = 8150 \text{ F}$$

Donc $S_{EB} < S_{EA}$ : ceci est un effet de structure.

## Quartiles

### Exo3 :

| $x_i$ | 0 | 0,8 | 1 | 1,4 | 2 | 2,6 | 3 | 3,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 12 | 15 | 20 | 5 | 4 | 10 | 1 |
| Effectifs cumulés croissants | 3 | 15 | 30 | 50 | 55 | 59 | 69 | 70 |

L'effectif total est : $N = 70$

1er décile : $N \times \frac{1}{10} = \frac{70}{10} = 7$ donc $D_1 = 0,8$

9ème décile : $N \times \frac{9}{10} = \frac{70 \times 9}{10} = 63$ donc $D_9 = 3$

### Exo4 :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 10 | 3 | 11 | 8 | 5 | 2 | 2 |
| Effectifs cumulés croissants | 7 | 17 | 20 | 31 | 39 | 44 | 46 | 48 |

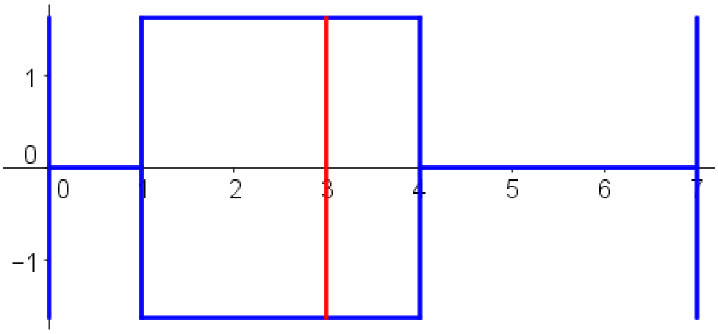
1) L'effectif total est : $N = 48$ → N est pair

$\frac{N}{2} = 24$ : le 24$^{ème}$ rang est 3 le 24$^{ème}$ rang est également 3 donc $M_e = 3$

1$^{er}$ quartile : $N \times \frac{25}{100} = 48 \times \frac{1}{4} = 12$ → le 12$^{ème}$ rang donne $Q_1 = 1$

3$^{ème}$ quartile : $N \times \frac{75}{100} = 48 \times \frac{3}{4} = 36$ → le 36$^{ème}$ rang donne $Q_3 = 4$

2)

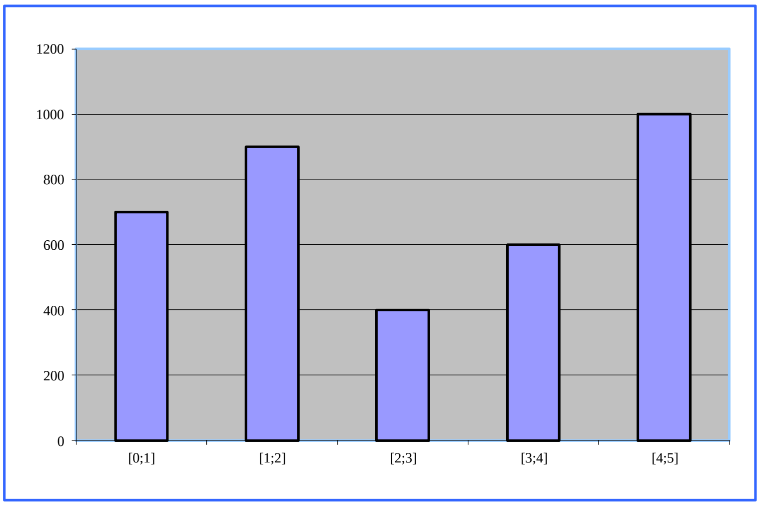



**Exo5 :**

Pendant 5 heures, on a recensé les véhicules qui se sont présentés à un péage d'autoroute, et on a présenté les résultats sur l'histogramme ci-contre.

On admet que la répartition est uniforme dans chaque classe.

Construire le diagramme en boîte représentant la répartition des véhicules




L'effectif total est : $N = 700 + 900 + 400 + 600 + 1000 = 3600$

Un tableau sera utile :

| Classes horaires | $[0;1[$ | $[1;2[$ | $[2;3[$ | $[3;4[$ | $[4;5]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 700 | 900 | 400 | 600 | 1000 |
| Effectifs cumulés croissants | 700 | 1600 | 2000 | 2600 | 3600 |

$N = 3600$ → N est pair

$\frac{N}{2} = 1800$ : le 1800$^{ème}$ rang est dans la classe $[2;3[$ , le 1801$^{ème}$ rang aussi

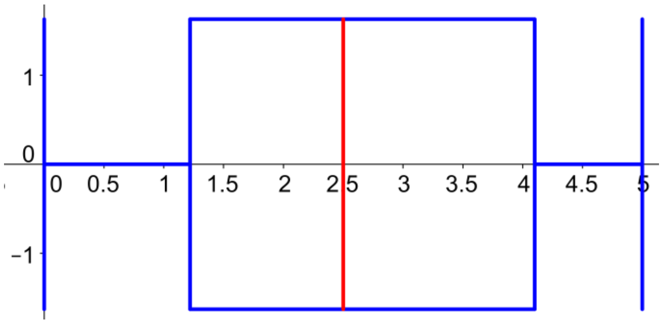
donc la classe médiane est $[2;3[$ .

La répartition étant supposée uniforme dans chaque classe, on peut trouver la médiane par interpolation linéaire, le 1800 rang étant au milieu de la classe, entre 1600 et 2000 :

$$M_e = 2 + \frac{1}{2}(3-2) = 2,5$$

1$^{er}$ quartile : $N \times \frac{25}{100} = 3600 \times \frac{1}{4} = 900$ →le 900$^{ème}$ rang donne la classe $[1;2[$ . Par interpolation linéaire, on obtient : $Q_1 = 1 + \frac{2}{9} \times (2-1) = \frac{11}{9} \simeq 1,22$

3ème quartile : $N\times\frac{75}{100}=3600\times\frac{3}{4}=2700$ →le 2700ème rang donne la classe $[4;5]$. Par interpolation linéaire, on obtient : $Q_3=4+\frac{1}{10}\times(5-4)=4,1$




## Exo6 :

On considère une série de 100 notes à un examen.

1) Si on augmente chaque note d'un point :
   →le changement affine effectué est défini par $y = x + 1$
   donc **tous les paramètres (**$M_e$, $Q_1$, $Q_3$, $D_1$ et $D_9$**) augmentent de 1**
2) On diminue chaque note de 10% :
   → le changement affine effectué est défini par $y = 0{,}9x$
   donc l'ordre n'est pas modifié et **tous les paramètres diminuent de 10%**
3) On augmente les 20 notes les plus basses d'un point
   →ici seul le **1e décile** est modifié : **il est augmenté de 1**

## Variance et écart-type

## Exo7 :

| distance | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 4 |

1) **Moyenne** : $\bar{x}=\frac{0\times5+1\times6+2\times5+3\times3+4\times4+5\times4}{5+6+5+3+4+4}=\frac{61}{27}\simeq 2,26$

**Variance :** $V_1=\frac{0^2\times5+1^2\times6+2^2\times5+3^2\times3+4^2\times4+5^2\times4}{5+6+5+3+4+4}-2,26^2$

$$=\frac{6+20+27+64+100}{27}-5,1076=\frac{217}{27}-5,1076\simeq 2,93$$

$$V_2=\frac{(0-2,26)^2\times5+(1-2,26)^2\times6+(2-2,26)^2\times5+(3-2,26)^2\times3+(4-2,26)^2\times4+(5-2,26)^2\times4}{5+6+5+3+4+4}$$

$$V_2=\frac{2,26^2\times5+1,26^2\times6+0,26^2\times5+0,74^2\times3+1,74^2\times4+2,74^2\times4}{27}\simeq 2,93$$

**Ecart-type** : $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{2,93}\simeq 1,71$

2) Le mode de cette série est la distance ayant le plus grand effectif ; il s'agit donc de **1 km**

3) Le nouveau tableau est :

| distance | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 4 | 1 |

**nouvelle Moyenne** : $\overline{x'} = \dfrac{27\times\overline{x}+1\times 250}{27+1} = \dfrac{27\times 2,26+250}{28} \simeq 11,12$ km

**nouvelle variance** :

$$V' = \frac{0^2\times 5+1^2\times 6+2^2\times 5+3^2\times 3+4^2\times 4+5^2\times 4+250^2\times 1}{5+6+5+3+4+4+1} - 11,12^2$$

$$= \frac{6+20+27+64+100+62\,500}{28} - 123,6544 = \frac{62\,717}{28} - 123,6544 \simeq 2116,24$$

**Nouvel Ecart-type** : $\sigma' = \sqrt{V'} = \sqrt{2116,24} \simeq 46$ km.

**Exo8 :**

Les températures dans une ville de France, pour le mois de juillet 2001, sont en moyenne de 25°C et ont comme écart-type 5°C.
Dans une ville anglaise, la moyenne a été, pour la même période, de 69°F et l'écart-type de 16°F.

1) On sait que : y °F = 1,8 × $x$ °C + 32.
   Ainsi : 1,8 × 25°C + 32 = 77°F donc **la moyenne française est supérieure à la moyenne anglaise**
   De même : 1,8 × 5°C = 9 donc **l'écart-type français est inférieur à l'écart-type anglais**
   (l'écart-type mesure un écart entre une température et la moyenne, donc on ne compte pas le +32).

2) On peut en conclure que statistiquement, la température française est supérieure à la température anglaise et que la moyenne française est plus fiable que l'anglaise puisque l'écart-type est plus faible.

**Exo9 :**

| gains | 3 175 250 | 75 380 | 3 890 | 210 | 115 | 25 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gagnants | 5 | 16 | 1 040 | 10 540 | 48 220 | 45 360 | 820 285 |

1) On veut estimer le nombre de grilles jouées ; la Française des jeux indique que 55% des mises des joueurs sont redistribuées aux gagnants ; sachant que la mise est de 2^F , donner une estimation du nombre de grilles enregistrées.

1) Le montant des gains est :
   $G = 3175250\times 5+75380\times 16+3890\times 1040+210\times 10540+115\times 48220+25\times 45360+12\times 820285$
   $G = 39864050$
   Or le montant des gains G représentent 55 % du montant des mises M :
   $$G = \frac{55}{100}\times M \iff M = \frac{100}{55}\times G = \frac{20}{11}\times 39864050 \simeq 72480090,9091\text{ F.}$$
   A deux Francs la mise, **on peut estimer à 36 240 045 le nombre de grilles enregistrées.**

2) L'effectif des gagnants est $N$ = 925 466
   La **moyenne des gains** est :
   $$\overline{x} = \frac{3175250\times 5+75380\times 16+3890\times 1040+210\times 10540+115\times 48220+25\times 45360+12\times 820285}{5+16+1040+10540+48220+45360+820285}$$
   $$\overline{x} = \frac{39864050}{925466} \simeq 43,075$$
   **Variance** : (calcul en deux temps) :

$$\frac{3175250^2\times 5+75380^2\times 16+3890^2\times 1040+210^2\times 10540+115^2\times 48220+25^2\times 45360+12^2\times 820285}{5+16+1040+10540+48220+45360+820285}$$

$$\frac{\text{N}}{2} = \frac{925\,466}{2} = 462733$$

$= 54\,587\,595,3319$

$V = 54\,587\,595,3319 - \left(\overline{x}\right)^2 = 54\,587\,595,3319 - 43,075^2 \simeq 54\,585\,739,8763$

Ecart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{54\,585\,739,8763} \simeq 7\,388,2$

3) L'effectif des gagnants est $N$ = 925 466

N est pair : $N$ = 925 466 → $\frac{\mathrm{N}}{2} = \frac{925\,466}{2} = 462\,733$

$N \times \frac{25}{100} = \frac{925\,466}{4} = 231366,5$

$N \times \frac{75}{100} = \frac{3 \times 925\,466}{4} = 694\,099,5$

Ainsi : $M_e = Q_1 = Q_3 = 12$