Dans tous ces exercices, le plan est muni d'un repère (O, I, J).

EXERCICE 7B.1

Sans effectuer le moindre calcul, et uniquement en étudiant la proportionnalité des coordonnées, dire si les vecteurs suivants sont colinéaires (si c'est le cas, on justifiera par l'égalité $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$) :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

e. $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 7B.2

En utilisant le critère « $xy' - x'y = 0$ » dire si les vecteurs suivants sont colinéaires :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\15\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\21\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

e. $\vec{u}\begin{pmatrix}24\\-18\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-16\\12\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 7B.3

On considère les points suivants :

A(–5 ; 3) B(–3 ; –1) C(1 ; 1) D(4 ; –1)
E(–2 ; 2) F(–5 ; –7) G(0 ; –7)

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils colinéaires ?

b. Les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils colinéaires ?

d. Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils colinéaires ?

e. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 7B.4

Dans chaque cas, calculer la valeur de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2+x\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

EXERCICE 7B.5

On considère les points :

A(2 ; –3) B(5 ; –1) M(x ; 1) N(–4 ; y)

a. Pour quelle valeur de x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ?

b. Pour quelle valeur de y les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires ?

EXERCICE 7B.6

On considère les 5 points A, B, C, D et E, qui permettent de définir les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

a. Les points A, B et C sont ils alignés ?
b. Les droites (AE) et (CD) sont elles parallèles ?
c. Les points A, C et D sont ils alignés ?
d. Les droites (AD) et (CE) sont elles parallèles ?
e. Les points A, B et E sont ils alignés ?
f. Les droites (BE) et (AC) sont elles parallèles ?

EXERCICE 7B.7

a. Les points A(3 ; 2), B(7 ; 3) et C(15 ; 5) sont-ils alignés ?

b. Les points D(–31 ; 12), E(–10 ; –3) et F(18 ; –22) sont-ils alignés ?

EXERCICE 7B.8

On donne les quatre points :

I(6 ; 1) J(–6 ; –3) K(–12 ; –5) L(7 ; –1)

Ces points sont-ils alignés ?

EXERCICE 7B.9

On considère le triangle ABC tel que :

A(–1 ; 2) B(–3 ; –2) C(5 ; 4)

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].

a. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?
b. Ce résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?

EXERCICE 7B10

On considère le triangle ABC tel que :

A(–3 ; 4) B(3 ;7) C(9 ; 1)

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI

EXERCICE 7B.1
Sans effectuer le moindre calcul, et uniquement en étudiant la proportionnalité des coordonnées, dire si les vecteurs suivants sont colinéaires (si c'est le cas, on justifiera par l'égalité $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$) :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$: $\vec{v} = 2\vec{u}$: ils sont colinéaires

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$: $\vec{v} = -2\vec{u}$: ils sont colinéaires

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

e. $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$:

EXERCICE 7B.2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ $6\times5-(-3)\times(-10)=0$: **OUI**

$\vec{u}\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix}$ $12\times40-16\times30=0$: **OUI**

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\15\end{pmatrix}$ $5\times15-(-7)\times21=222$: **NON**

$\vec{u}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\21\end{pmatrix}$ $21\times21-15\times28=21$: **NON**

$\vec{u}\begin{pmatrix}24\\-18\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-16\\12\end{pmatrix}$ $24\times12-(-16)\times(-18)=0$ **OUI**

EXERCICE 7B.3 On considère les points suivants :
A(–5 ; 3) B(–3 ; –1) C(1 ; 1) D(4 ; –1)
E(–2 ; 2) F(–5 ; –7) G(0 ; –7)

a. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

$6\times(-3)-6\times(-2)=-6$: →non colinéaires

b. $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF} = -1{,}5\ \overrightarrow{FB}$: → colinéaires

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = 1{,}5\ \overrightarrow{BG}$: → colinéaires

d. $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix}$

$6\times(-9)-2\times8=-70$: →non colinéaires

e. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

$7\times(-3)-(-1)\times6=-15$: →non colinéaires

EXERCICE 7B.4
a. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires, leur déterminant est nul :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x & -4\\2 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x\times1-2\times(-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$$

b. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2+x\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires, leur déterminant est nul :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2+x & -2\\-3 & 3\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 3(2+x)-(-2)\times(-3)=0 \Leftrightarrow 6+3x-6=0$$
$$\Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=0$$

EXERCICE 7B.5
On considère les points :
A(2 ; –3) B(5 ; –1) M(x ; 1) N(–4 ; y)

a. Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\4\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires, leur déterminant est nul :

$$3\times4-2(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 12-2x+4=0 \Leftrightarrow x=8$$

b. Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-9\\y+1\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires, leur déterminant est nul :

$$3(y+1)-2\times(-9)=0$$
$$\Leftrightarrow 3y+3+18=0 \Leftrightarrow y=-7$$

EXERCICE 7B.6
On considère les 5 points A, B, C, D et E, qui permettent de définir les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

a. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2\times0-7\times1=0-7=-7$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés

b. $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CD}$ donc (AE) // (CD)

c. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, C et D ne sont pas alignés

d. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CE}$ donc (AD) // (CE)

e. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ donc (AE) // (AB) : ces deux droites ont un point commun : A, B et E sont alignés

f. $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (BE) et (AC) ne sont pas parallèles

EXERCICE 7B.7

a. Les points A(3 ; 2), B(7 ; 3) et C(15 ; 5) sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix} \quad \text{ainsi } \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$$

donc (AC) // (AB) : ces deux droites ont un point commun : A, B et C sont alignés

b. Les points D(–31 ; 12), E(–10 ; –3) et F(18 ; –22) sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}21\\-15\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}28\\-19\end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}) = 21\times(-19)-(-15)\times 28$$
$$= -399+420 = 21$$

donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires : D, E et F ne sont pas alignés

EXERCICE 7B.8

On donne les quatre points :

I(6 ; 1) J(–6 ; –3) K(–12 ; –5) L(7 ; –1)

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-12\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-18\\-6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IL}\right) = \begin{vmatrix}-12 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix} = -12\times(-2)-(-4)\times 1 = 28$$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne sont pas colinéaires donc ces points ne sont pas alignés

EXERCICE 7B.9

On considère le triangle ABC tel que :

A(–1 ; 2) B(–3 ; –2) C(5 ; 4)

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].

a. $I\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$ soit $I\begin{pmatrix}\dfrac{-1+(-3)}{2}\\ \dfrac{2+(-2)}{2}\end{pmatrix}$ soit $I\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

De même $J\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

b. Ce résultat était prévisible : on retrouve le théorème des milieux (introduction au théorème de Thalès)

EXERCICE 7B10

On considère le triangle ABC tel que :

A(–3 ; 4) B(3 ;7) C(9 ; 1)

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

PREMIERE METHODE :

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Soit $N\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x'+3\\y'-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3 = \frac{1}{3}\times 6\\ y-4 = \frac{1}{3}\times 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=5\end{cases} : M(-1;5)$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}x'+3 = \frac{1}{3}\times 12\\ y'-4 = \frac{1}{3}\times(-3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=1\\ y'=3\end{cases} : N(1;3)$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

Ainsi $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{MN}$

Donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

DEUXIEME METHODE :

Il faut comparer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

Donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

TROISIEME METHODE :

Il faut comparer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$.

On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2+4\\-1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.