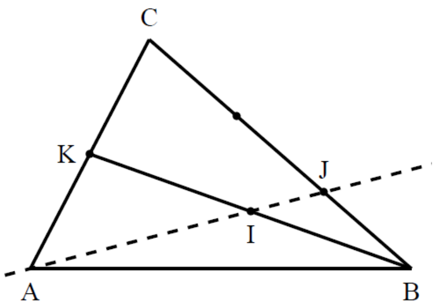
Exercice 7C.1 :

1) On donne les points $A(-2;-1)$, $B(5;3)$ et $C(7;4)$.
   Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) On donne les points $A(-3;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-3)$ et $D(-3;-4)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 7C.2 :

Sur la figure ci-contre, K est le milieu de $[AC]$, I celui de $[BK]$ et J le point tel que : $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BJ}$.

1) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, calculer les coordonnées des points K, I et J.
2) Démontrer que les points A, I et J sont alignés.



Exercice 7C.3 :

On donne les points $A(-1;3)$, $B(1;1)$, $C(2;2)$ et $D(3;4)$.

1) Calculer les coordonnées des points E, F et G tels que :
   a. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ b. C est le milieu de $[AF]$ c. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}$
2) Démontrer que les points E, F et G sont alignés.

Exercice 7C.1 :

1) *On donne les points* $A(-2;-1)$, $B(5;3)$ *et* $C(7;4)$.
   Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) *On donne les points* $A(-3;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-3)$ *et* $D(-3;-4)$.
   Les droites (AB) *et* (CD) *sont-elles parallèles ?*

1) $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}5-(-2)\\3-(-1)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}7\\4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}7-(-2)\\4-(-1)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}9\\5\end{vmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}7 & 9\\4 & 5\end{vmatrix}=7\times5-9\times4=35-36=-1$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1-(-3)\\4-2\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}-3-(-1)\\-4-(-3)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}$

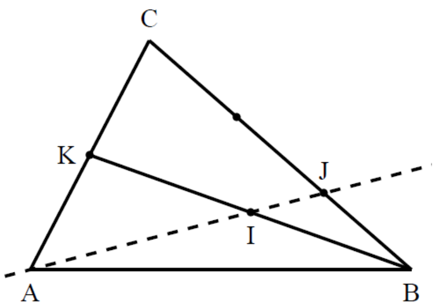
$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\begin{vmatrix}4 & -2\\2 & -1\end{vmatrix}=4\times(-1)-2\times(-2)=-4+4=0$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et $(AB)//(CD)$.

Exercice 7C.2 :

Sur la figure ci-contre, K est le milieu de $[AC]$, *I celui de* $[BK]$ *et J le point tel que :* $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BJ}$.

1) *Dans le repère* $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, *calculer les coordonnées des points K, I et J.*
2) *Démontrer que les points A, I et J sont alignés.*



1) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, on obtient les points :

Méthode 1 :

$B(1;0)$, $C(0;1)$,

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

I est le milieu de $[BK]$ donc :

$$x_I=\frac{x_B+x_K}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_B+y_K}{2}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

soit $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

$$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C-x_B=3(x_J-x_B)\\y_C-y_B=3(y_J-y_B)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0-1=3(x_J-1)\\1-0=3(y_J-0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=3x_J-3\\1=3y_J\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1+3=3x_J\\\frac{1}{3}=y_J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=3x_J\\\frac{1}{3}=y_J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3}=x_J\\\frac{1}{3}=y_J\end{cases} \quad \text{soit } J\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BJ} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AJ} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AJ} \\
\Leftrightarrow\ & -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ}
\end{aligned}$$

Donc dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, les coordonnées de J sont : $J\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

2) $\overrightarrow{AI}\begin{vmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{vmatrix} x_J - x_A \\ y_J - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}\begin{vmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$

$$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et les points A, I et J sont alignés.

Exercice 7C.3 :

On donne les points $A(-1;3)$, $B(1;1)$, $C(2;2)$ *et* $D(3;4)$.

1) *Calculer les coordonnées des points E, F et G tels que :*

   a. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ *b. C est le milieu de* $[AF]$ *c.* $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

2) *Démontrer que les points E, F et G sont alignés.*

1) $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_A = 3(x_B - x_A) \\ y_E - y_A = 3(y_B - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - (-1) = 3(1-(-1)) \\ y_E - 3 = 3(1-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 1 = 3\times 2 \\ y_E - 3 = 3\times(-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 1 = 6 \\ y_E - 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 6 - 1 = 5 \\ y_E = -6 + 3 = -3 \end{cases}$ → $E(5;-3)$

C est le milieu de $[AF]$ donc :

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_F}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_F}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_F}{2} \\ 2 = \frac{3 + y_F}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 2 = -1 + x_F \\ 2\times 2 = 3 + y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 1 = x_F \\ 4 - 3 = y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 1 \end{cases}$$

soit $F(5;1)$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - x_A = \frac{3}{2}(x_D - x_A) \\ y_G - y_A = \frac{3}{2}(y_D - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - (-1) = \frac{3}{2}(3-(-1)) \\ y_G - 3 = \frac{3}{2}(4-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = \frac{3}{2}\times 4 \\ y_G - 3 = \frac{3}{2}\times 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = 6 \\ y_G - 3 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 6 - 1 = 5 \\ y_G = \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$ → $G\left(5;\frac{9}{2}\right)$.

2) $\overrightarrow{EF}\begin{vmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{vmatrix} 5-5 \\ 1-(-3) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} 5-5 \\ \frac{9}{2}-(-3) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \end{vmatrix}$

Deux méthodes :

- $\overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \end{vmatrix}$ donc $\frac{8}{15}\overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{8}{15}\times\frac{15}{2} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{8}{15}\overrightarrow{EG}\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ ainsi :

  $\overrightarrow{EF} = \frac{8}{15}\overrightarrow{EG}$: les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, les points E, F et G sont alignés.

- $\det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0\times\frac{15}{2} - 0\times 4 = 0$ pour la même conclusion.