

Dans tous ces exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$

**EXERCICE 8B.1**

On considère les points  $A(-1 ; 4)$ ,  $B(3 ; 1)$ ,  $C(7 ; -2)$  et  $D(-6 ; -8)$ .  
Calculer les distances  $AB$ ,  $AC$  et  $AD$ .

**EXERCICE 8B.2**

On considère les points  $A(1 ; 5)$ ,  $B(3 ; 8)$  et  $C(9 ; 4)$ .  
Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle.

**EXERCICE 8B.3**

On considère les points  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(1 ; 1)$  et  $C(0 ; 1 + \sqrt{3})$ .  
Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

**EXERCICE 8B.4**

On considère les points  $A(-1 ; 3)$ ,  $B(1 ; 6)$  et  $C(4 ; 4)$ .  
Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?

**EXERCICE 8B.5**

On considère les points  $A(-1 ; 2)$ ,  $B(0 ; 4)$ ,  $C(2 ; 5)$  et  $D(1 ; 3)$ .  
Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?

**EXERCICE 8B.6**

On considère les points  $A(-3 ; 5)$ ,  $B(-4 ; 7)$ ,  $C(-6 ; 6)$  et  $D(-5 ; 4)$ .  
Démontrer que  $ABCD$  est un carré.

**EXERCICE 8B.7**

On considère les points  $A(-1 ; 2)$ ,  $B(1 ; 2)$ ,  $C(3 ; -1)$  et  $D(-3 ; -1)$ .  
Démontrer que  $ABCD$  est un trapèze isocèle.

**EXERCICE 8B.8**

1. On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ . Ecrire la relation de Pythagore pour ce triangle.

2. a. On note  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Démontrer que dans ce cas  $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$ .

(Remarque : puisque le triangle est rectangle en  $A$ , on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux**).

b. On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

c. Montrer que l'égalité de Pythagore revient à dire que  $xx' + yy' = 0$

**On retiendra la propriété suivante :**

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

**EXERCICE 8B.9**

Dans chaque cas, dire si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

a.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

e.  $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

f.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

g.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

h.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

i.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

**EXERCICE 8B.10**

Refaire les exercices **8B.2**, **8B.4** et **8B.6** en utilisant le critère d'orthogonalité.

**CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER****EXERCICE 8B.1**

On considère les points A(-1 ; 4), B(3 ; 1), C(7 ; -2) et D(-6 ; -8).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{(7 + 1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-6 - (-1))^2 + (-8 - 4)^2} = \sqrt{(-6 + 1)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

**EXERCICE 8B.2**

On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(9 - 1)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(9 - 3)^2 + (4 - 8)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Ainsi :  $AC^2 = 65$  ,  $AB^2 = 13$  et  $BC^2 = 52$  donc  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en B.

**EXERCICE 8B.3**

On considère les points A(-1 ; 1), B(1 ; 1) et C(0 ;  $1 + \sqrt{3}$ ).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (1 + \sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 + \sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Ainsi :  $AB = AC = BC = 2$  : le triangle ABC est **équilatéral**.

**EXERCICE 8B.4**

On considère les points A(-1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Ainsi :  $AB^2 = 13$  ,  $AC^2 = 26$  et  $BC^2 = 13$  donc  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  ; de plus :  $AB = BC$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle et isocèle** en B.

**EXERCICE 8B.5**

On considère les points A(-1 ; 2), B(0 ; 4), C(2 ; 5) et D(1 ; 3).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Ainsi :  $AB = BC = CD = DA$  : le quadrilatère ABCD est un **losange**.

$$\text{De plus : } AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

Donc  $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$  : ce losange n'est pas un carré.

**EXERCICE 8B.6** On considère les points A(-3 ; 5), B(-4 ; 7), C(-6 ; 6) et D(-5 ; 4).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - (-3))^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-6 - (-4))^2 + (6 - 7)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-5 - (-6))^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Ainsi :  $AB = BC = CD = DA$  : le quadrilatère ABCD est un **losange**.

$$\text{De plus : } AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6 - (-3))^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Donc  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce losange possède un angle droit : ABCD est un **carré**.

**EXERCICE 8B.7** On considère les points A(-1 ; 2), B(1 ; 2), C(3 ; -1) et D(-3 ; -1).

Démontrer que ABCD est un trapèze isocèle.

$$\overline{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 1 - (-1) \\ 2 - 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{CD} \begin{vmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{CD} \begin{vmatrix} -3 - 3 \\ -1 - (-1) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{CD} \begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ainsi :  $\overline{CD} = -3\overline{AB}$  : ABCD est un **trapèze** ayant deux cotés parallèles.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Ainsi :  $BC = AD$  : ABCD est un **trapèze isocèle**.

### EXERCICE 8B.8

1. On considère un triangle ABC rectangle en A.

D'après la relation de Pythagore pour ce triangle :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2. a. On note  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$$

(Remarque : puisque le triangle est rectangle en A, on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux**).

b. On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  : ainsi :  $\overline{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\overline{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\overline{BC} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$

c.  $AB^2 = x^2 + y^2$ ,  $AC^2 = x'^2 + y'^2$  et  $BC^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2$

L'égalité de Pythagore devient :  $x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$

soit :  $-2xx' - 2yy' = 0$

d'où :  $xx' + yy' = 0$

On retiendra la propriété suivante :

$$\boxed{\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0}$$

**EXERCICE 8B.9** Dans chaque cas, dire si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

a.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 4 \times 3 + (-2) \times 6 = 0$  : OUI

d.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 5 \times 3 + (-2) \times 7 = 1$  : NON

g.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 4 \times (-5) + (-2) \times (-10) = 0$  : OUI

b.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 1 \times (-4) + (-4) \times (-1) = 0$  : OUI

e.  $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow -6 \times 5 + 15 \times (-2) = -30$  : NON

h.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 3 \times (-6) + (-9) \times (-2) = 0$  : OUI

c.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 6 \times 1 + (-3) \times 2 = 0$  : OUI

f.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 0 \times 11 + (-7) \times 0 = 0$  : OUI

i.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 35 \times (-2) + 14 \times 5 = 0$  : OUI

**EXERCICE 8B.10** Refaire les exercices **8B.2**, **8B.4** et **8B.6** en utilisant le critère d'orthogonalité.

**EXERCICE 8B.2** On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).

$$\overline{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 3-1 \\ 8-5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ et } \overline{BC} \begin{vmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} 9-3 \\ 4-8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} 6 \\ -4 \end{vmatrix}$$

$2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0$  :  $\overline{AB}$  et  $\overline{BC}$  sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

**EXERCICE 8B.4** On considère les points A(-1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).

$$\overline{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 1 - (-1) \\ 6 - 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ et } \overline{BC} \begin{vmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} 4 - 1 \\ 4 - 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$  :  $\overline{AB}$  et  $\overline{BC}$  sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

**EXERCICE 8B.6** On considère les points A(-3 ; 5), B(-4 ; 7), C(-6 ; 6) et D(-5 ; 4).

$$\overline{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} -4 - (-3) \\ 7 - 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AB} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \overline{BC} \begin{vmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} -6 - (-4) \\ 6 - 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BC} \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{CD} \begin{vmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{CD} \begin{vmatrix} -5 - (-6) \\ 4 - 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{CD} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}, \overline{AD} \begin{vmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AD} \begin{vmatrix} -5 - (-3) \\ 4 - 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AD} \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$-1 \times (-2) + 2 \times (-1) = 0$  :  $\overline{AB}$  et  $\overline{BC}$  sont orthogonaux

$(-2) \times 1 + (-1) \times (-2) = 0$  :  $\overline{BC}$  et  $\overline{CD}$  sont orthogonaux

$1 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 0$  :  $\overline{CD}$  et  $\overline{AD}$  sont orthogonaux

→ Un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.

$$\overline{AC} \begin{vmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AC} \begin{vmatrix} -6 - (-3) \\ 6 - 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{AC} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}, \overline{BD} \begin{vmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BD} \begin{vmatrix} -5 - (-4) \\ 4 - 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overline{BD} \begin{vmatrix} -1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$(-3) \times (-1) + 1 \times (-3) = 0$  :  $\overline{AC}$  et  $\overline{BD}$  sont orthogonaux

→ Un rectangle ayant des diagonales perpendiculaires est un carré donc ABCD est un carré.