Fiche 4 : Inéquations avec une racine carrée

Une équation dans laquelle la variable apparait sous un radical est appelée une ***équation irrationnelle****.*

Exercices 4.1 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{4x-20} > 6$
b) $\sqrt{8-x} \leq 4$
c) $\sqrt{3x-8} \geq -5$
d) $\sqrt{2+5x} < 9$
e) $\sqrt{x-9} \leq 5$
f) $\sqrt{8-2x} > 3$
g) $\sqrt{10-5x} < 4$
h) $\sqrt{18-x} \geq 3$

Exercices 4.2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{3-x} - 10 > 6$
b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0$
c) $2\sqrt{5-x} - 5 < 8$
d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} > 0$
e) $\sqrt{x-5} - \sqrt{4-2x} < 0$

Exercices 4.3 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{\frac{1}{x} - 2} > 3$
b) $2\sqrt{3 + \frac{1}{x}} < 8$
c) $2\sqrt{5 + \frac{1}{x}} - 6 < 4$

Exercices 4.1 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{4x-20} > 6$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $4x-20 \geq 0 \iff 4x \geq 20 \iff \dfrac{4x}{4} \geq \dfrac{20}{4} \iff x \geq 5$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [5;+\infty[$

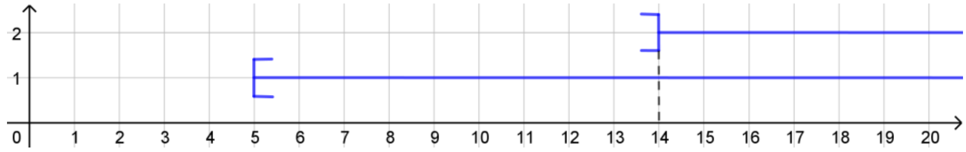
Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{4x-20} > 6 \iff \left(\sqrt{4x-20}\right)^2 > 6^2 \iff 4x-20 > 36 \iff 4x > 36+20 \iff 4x > 56$$

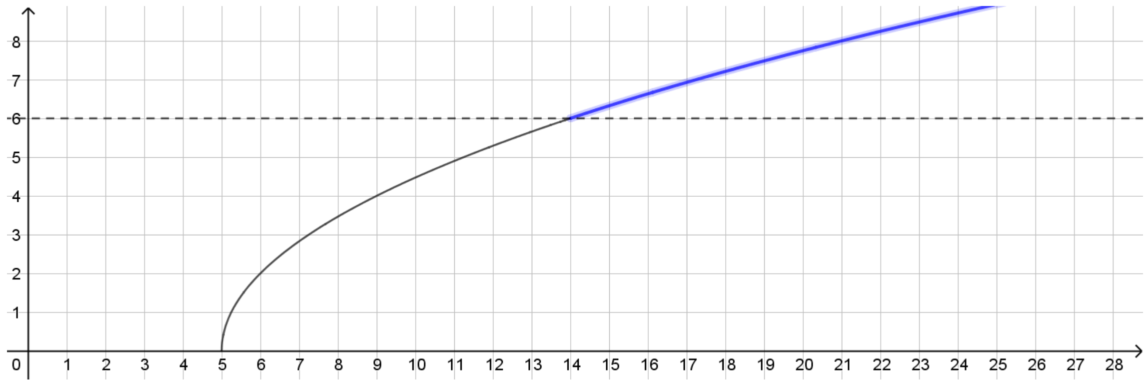
$$\iff \frac{4x}{4} > \frac{56}{4} \iff x > 14$$

→ le domaine de résolution est $D_R =]14;+\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R =]14;+\infty[$



b) $\sqrt{8-x} \leq 4$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $8-x \geq 0 \iff -x \geq -8 \iff -x \times (-1) \leq -8 \times (-1) \iff x \leq 8$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty;8]$

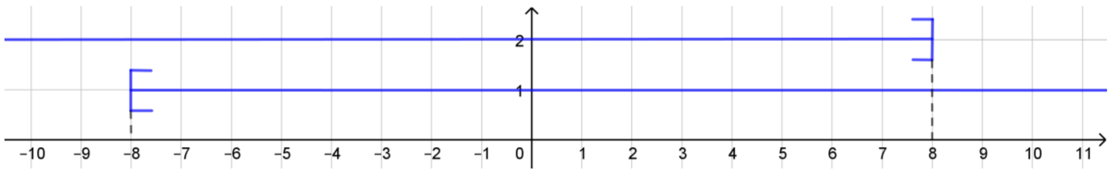
Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{8-x} \leq 4 \iff \left(\sqrt{8-x}\right)^2 \leq 4^2 \iff 8-x \leq 16 \iff -x \leq 16-8 \iff -x \leq 8$$

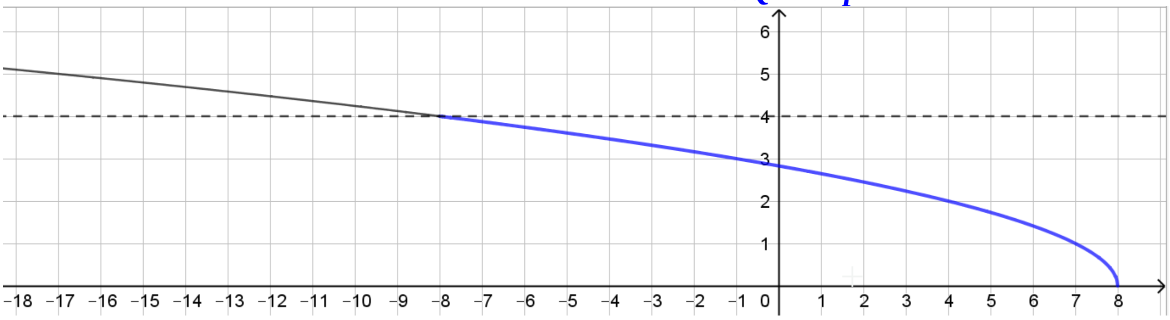
$$\iff -x \times (-1) \geq 8 \times (-1) \iff x \geq -8$$

→ le domaine de résolution est $D_R = [-8;+\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R = [-8;8]$



c) $\sqrt{3x-8} \geq -5$

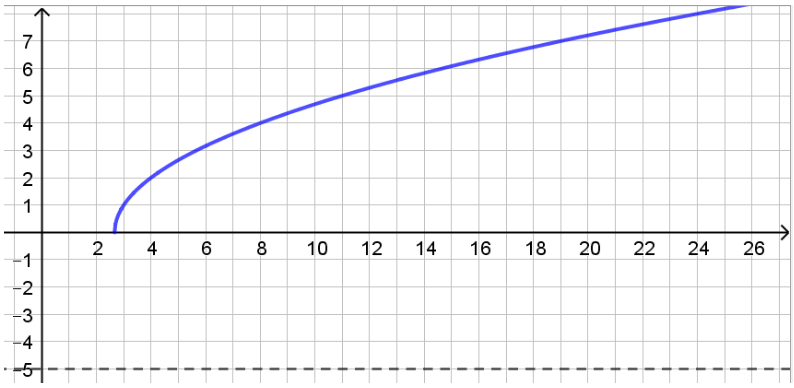
Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $3x-8 \geq 0 \iff 3x \geq 8 \iff x \geq \frac{8}{3}$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = \left[\frac{8}{3};+\infty\right[$

Résolution : La résultat d'une racine carrée est toujours positif donc l'inéquation est toujours vérifiée sur son domaine de viabilité.

La solution est $S = D_E = \left[\frac{8}{3};+\infty\right[$



d) $\sqrt{2+5x} < 9$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $2+5x \geq 0 \iff 5x \geq -2 \iff x \geq \frac{-2}{5}$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = \left[-\frac{2}{5};+\infty\right[$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

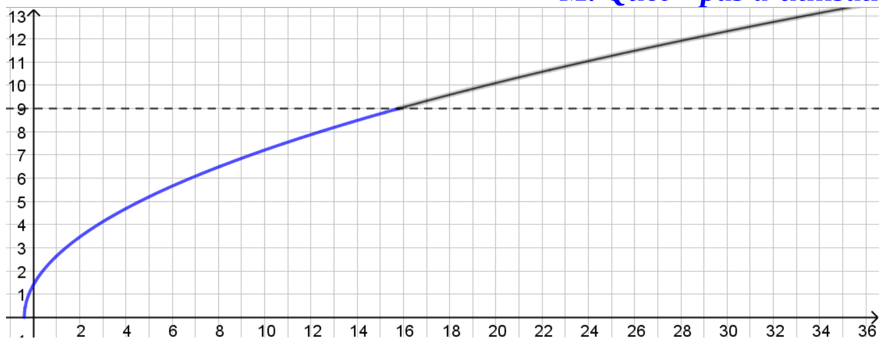
$$\sqrt{2+5x} < 9 \iff \left(\sqrt{2+5x}\right)^2 < 9^2 \iff 2+5x < 81 \iff 5x < 81-2 \iff 5x < 79$$

$$\iff \frac{5x}{5} < \frac{79}{5} \iff x < \frac{79}{5}$$

→ le domaine de résolution est $D_R = \left]-\infty;\frac{79}{5}\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S = D_E \cap D_R = \left[-\frac{2}{5};\frac{79}{5}\right[$$



e) $\sqrt{x-9} \le 5$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-9 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 9$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [9;+\infty[$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\left(\sqrt{x-9}\right)^2 \le 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x-9 \le 25 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 25+9 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 34$$

Donc : $D_R =]-\infty;34]$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = [9;34]$$

f) $\sqrt{8-2x} > 3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $8-2x \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \ge -8 \quad \Leftrightarrow \quad x \le \dfrac{-8}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \le 4$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty;4]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\left(\sqrt{8-2x}\right)^2 > 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8-2x > 9 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 9-8 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2}$$

Donc : $D_R = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$$

g) $\sqrt{10-5x} < 4$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-9 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 9$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [9;+\infty[$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\left(\sqrt{10-5x}\right)^2 < 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad 10-5x < 16 \quad \Leftrightarrow \quad -5x < 16-10 \quad \Leftrightarrow \quad -5x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{6}{5}$$

Donc : $D_R = \left]-\dfrac{6}{5};+\infty\right[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = \left]-\frac{6}{5};2\right]$$

h) $\sqrt{18-x} \geq 3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $18-x \geq 0 \iff -x \geq -18 \iff x \leq 18$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty;18]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\left(\sqrt{18-x}\right)^2 \geq 3^2 \iff 18-x \geq 9 \iff -x \geq 9-18 \iff -x \geq -9 \iff x \leq 9$$

Donc : $D_R =]-\infty;9]$

Solution :

$S = D_E \cap D_R =]-\infty;9]$

Exercices 4.2 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{3-x} - 10 > 6$

Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $3-x \geq 0 \iff -x \geq -3 \iff -x \times (-1) \leq -3 \times (-1) \iff x \leq 3$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty;3]$

Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$$2\sqrt{3-x} - 10 > 6 \iff 2\sqrt{3-x} > 6+10 \iff 2\sqrt{3-x} > 16 \iff \sqrt{3-x} > \frac{16}{2} \iff \sqrt{3-x} > 8$$

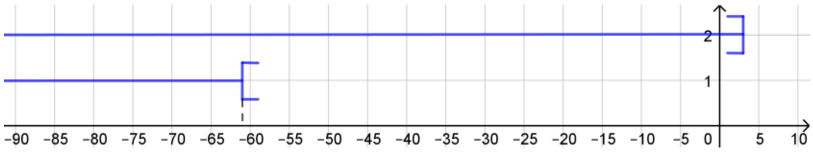
La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{3-x} > 8 \iff \left(\sqrt{3-x}\right)^2 > 8^2 \iff 3-x > 64 \iff -x > 64-3 \iff -x > 61$$

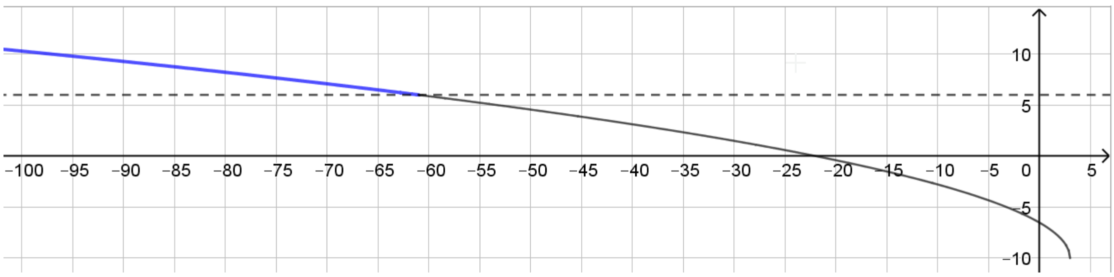
$$-x > 61 \iff -x \times (-1) < 61 \times (-1) \iff x < -61$$

→ le domaine de résolution est $D_R =]-\infty;-61[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R =]-\infty;-61[$

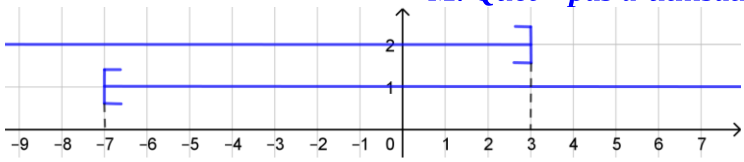


b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0$

Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x+7 \geq 0 \iff x \geq -7$

et $6-2x \geq 0 \iff -2x \geq -6 \iff \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-6}{-2} \iff x \leq 3$



→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [-7;3]$

Résolution :

On isole en priorité chaque racine carrée :

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0 \iff \sqrt{x+7} \geq \sqrt{6-2x}$$

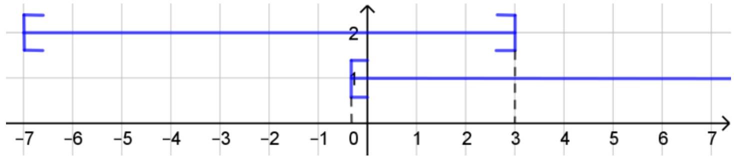
La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{6-2x} \iff \left(\sqrt{x+7}\right)^2 \geq \left(\sqrt{6-2x}\right)^2 \iff x+7 \geq 6-2x \iff x+7+2x \geq 6$$

$$\iff 3x \geq 6-7 \iff 3x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{3}$$

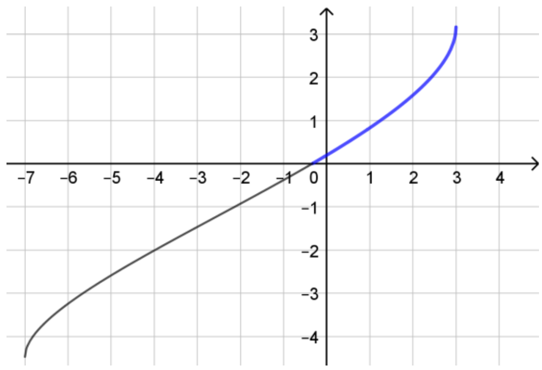
→ le domaine de résolution est $D_R = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$$S = D_E \cap D_R = \left[-\frac{1}{3};3\right]$$

Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x}$



c) $2\sqrt{5-x} - 5 < 8$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $5-x \geq 0 \iff -x \geq -5 \iff x \leq 5$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty;5]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$2\sqrt{5-x} - 5 < 8 \iff 2\sqrt{5-x} < 8+5 \iff \sqrt{5-x} < \frac{13}{2} \iff \left(\sqrt{5-x}\right)^2 < \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\iff 5-x < \frac{169}{4} \iff -x < \frac{169}{4} - 5 \iff -x < \frac{149}{4} \iff -x \times (-1) > \frac{149}{4} \times (-1) \iff x > -\frac{149}{4}$$

Donc : $D_R = \left]-\frac{149}{4};+\infty\right[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = \left]-\frac{149}{4};5\right]$$

d) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}>0$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x+1\geq 0 \iff x\geq -1$ et $2-x\geq 0 \iff -x\geq -2 \iff x\leq 2$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E=[-1;2]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}>0 \iff \sqrt{x+1}>\sqrt{2-x} \iff \left(\sqrt{x+1}\right)^2>\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x+1>2-x$$

$$\iff x+x>2-1 \iff 2x>1 \iff x>\frac{1}{2}$$

Donc : $D_R=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Solution :

$$S=D_E\cap D_R=\left]\frac{1}{2};2\right]$$

e) $\sqrt{x-5}-\sqrt{4-2x}<0$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-5\geq 0 \iff x\geq 5$ et $4-2x\geq 0 \iff -2x\geq 4 \iff x\leq -2$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E=\varnothing$

Il n'y a pas de solution :

$S=\varnothing$

Exercices 4.3 : *Résoudre les inéquations suivantes :*

a) $\sqrt{\frac{1}{x}-2}>3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $\frac{1}{x}-2\geq 0 \iff \frac{1}{x}\geq 2$ et il faut que $\frac{1}{x}$ existe donc $x\neq 0$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	0

→ D'après le tableau de variation : $D_E=\left]0;\frac{1}{2}\right]$

Résolution :

La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{\frac{1}{x}-2}>3 \iff \left(\sqrt{\frac{1}{x}-2}\right)^2>3^2 \iff \frac{1}{x}-2>9 \iff \frac{1}{x}>9+2 \iff \frac{1}{x}>11$$

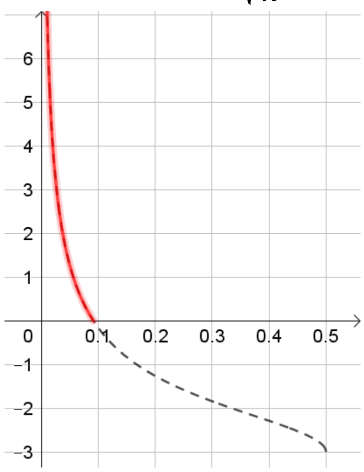
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{11}$		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	11	↘	0

→ le domaine de résolution est $D_R = \left]0;\frac{1}{11}\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S = D_E \cap D_R = \left]0;\frac{1}{11}\right[$$

Représentation graphique de la fonction $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{x}-2}-3$



b) $2\sqrt{3+\frac{1}{x}}<8$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $3+\frac{1}{x}\geq 0 \iff \frac{1}{x}\geq -3$ et il faut que $\frac{1}{x}$ existe donc $x\neq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

→ D'après le tableau de variation : $D_E = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left]0;+\infty\right[$

Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$$2\sqrt{3+\frac{1}{x}}<8 \iff \sqrt{3+\frac{1}{x}}<\frac{8}{2} \iff \sqrt{3+\frac{1}{x}}<4$$

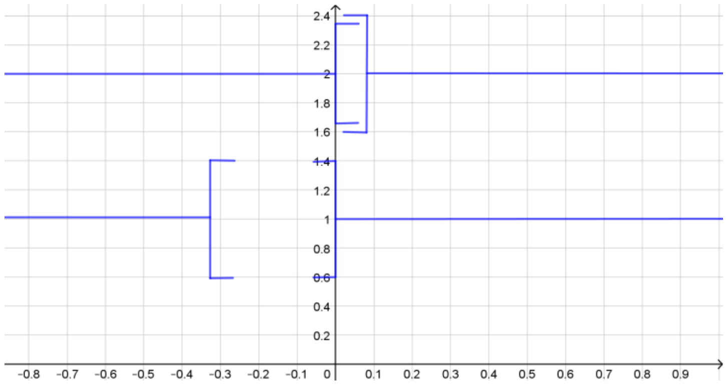
La fonction carré est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$

$$\sqrt{3+\frac{1}{x}}<4 \iff \left(\sqrt{3+\frac{1}{x}}\right)^2<4^2 \iff 3+\frac{1}{x}<16 \iff \frac{1}{x}<16-3 \iff \frac{1}{x}<13$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{13}$		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	13	↘	0

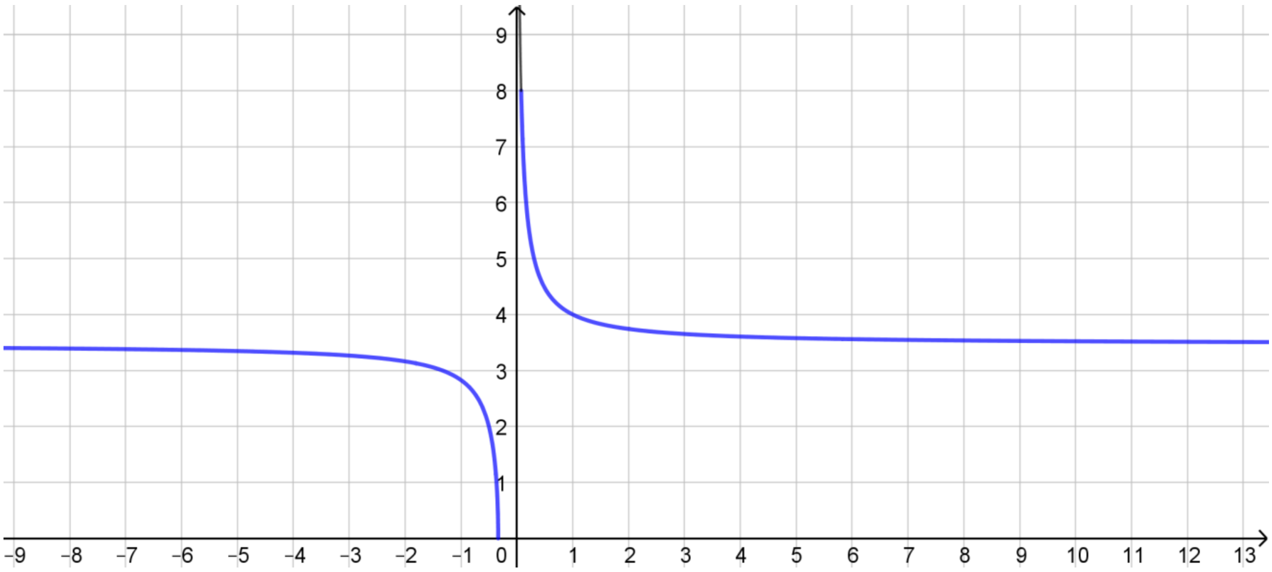
→ le domaine de résolution est $D_R = \left]-\infty;0\right[\cup \left]\frac{1}{13};+\infty\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$$S = D_E \cap D_R = \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{13} ; +\infty\right[$$

Représentation graphique de la fonction $f(x) = 2\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}$



c) $2\sqrt{5+\dfrac{1}{x}} - 6 < 4$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $5+\dfrac{1}{x} \geq 0 \iff \dfrac{1}{x} \geq -5$ et il faut que $\dfrac{1}{x}$ existe donc $x \neq 0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{5}$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	↘	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

→ D'après le tableau de variation : $D_E = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{5}\right] \cup \left]0 ; +\infty\right[$

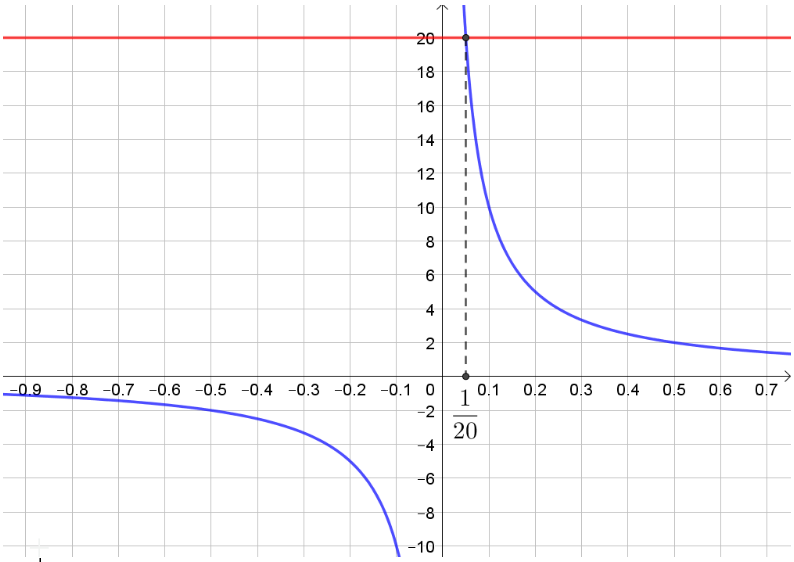
Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$$2\sqrt{5+\frac{1}{x}} - 6 < 4 \iff 2\sqrt{5+\frac{1}{x}} < 4+6 \iff 2\sqrt{5+\frac{1}{x}} < 10 \iff \sqrt{5+\frac{1}{x}} < \frac{10}{2} \iff \sqrt{5+\frac{1}{x}} < 5$$

La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\sqrt{5+\frac{1}{x}}<5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5+\frac{1}{x}}\right)^2<5^2 \Leftrightarrow 5+\frac{1}{x}<25 \Leftrightarrow \frac{1}{x}<25-5 \Leftrightarrow \frac{1}{x}<20$$



x	$-\infty$		0		$\frac{1}{20}$		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	20	$\searrow$	0

→ le domaine de résolution est $D_R=]-\infty;0[\cup\left]\frac{1}{20};+\infty\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S=D_E\cap D_R=\left]-\infty;-\frac{1}{5}\right[\cup\left]\frac{1}{20};+\infty\right[$$