

Fiche 4 : Inéquations avec une racine carrée

Une équation dans laquelle la variable apparaît sous un radical est appelée une **équation irrationnelle**.

Exercices 4.1 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{4x-20} > 6$

b) $\sqrt{8-x} \leq 4$

c) $\sqrt{3x-8} \geq -5$

d) $\sqrt{2+5x} < 9$

e) $\sqrt{x-9} \leq 5$

f) $\sqrt{8-2x} > 3$

g) $\sqrt{10-5x} < 4$

h) $\sqrt{18-x} \geq 3$

Exercices 4.2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{3-x} - 10 > 6$

b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0$

c) $2\sqrt{5-x} - 5 < 8$

d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} > 0$

e) $\sqrt{x-5} - \sqrt{4-2x} < 0$

Exercices 4.3 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{\frac{1}{x}-2} > 3$

b) $2\sqrt{3+\frac{1}{x}} < 8$

c) $2\sqrt{5+\frac{1}{x}} - 6 < 4$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercices 4.1 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{4x-20} > 6$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $4x-20 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 20 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} \geq \frac{20}{4} \Leftrightarrow x \geq 5$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [5; +\infty[$

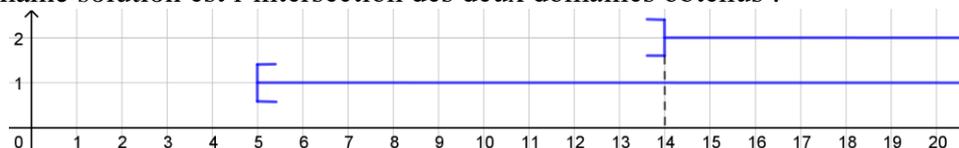
Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$\sqrt{4x-20} > 6 \Leftrightarrow (\sqrt{4x-20})^2 > 6^2 \Leftrightarrow 4x-20 > 36 \Leftrightarrow 4x > 36+20 \Leftrightarrow 4x > 56$

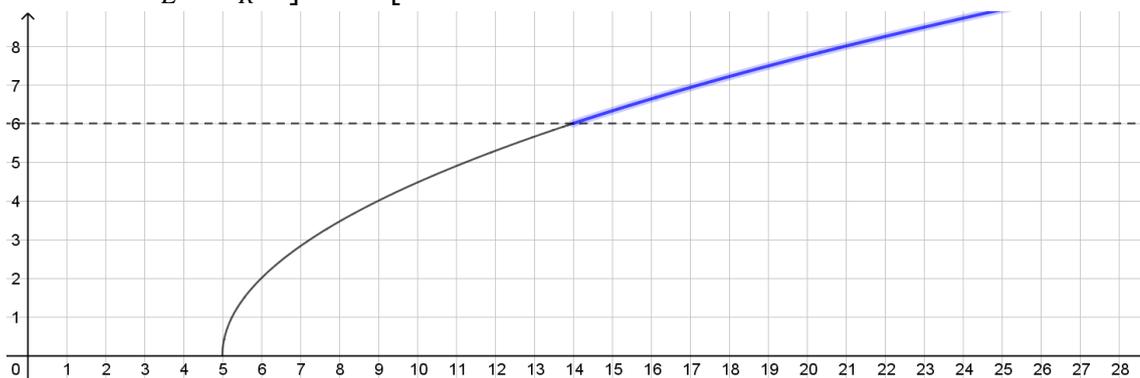
$\Leftrightarrow \frac{4x}{4} > \frac{56}{4} \Leftrightarrow x > 14$

→ le domaine de résolution est $D_R =]14; +\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R =]14; +\infty[$



b) $\sqrt{8-x} \leq 4$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $8-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -8 \Leftrightarrow -x \times (-1) \leq -8 \times (-1) \Leftrightarrow x \leq 8$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty; 8]$

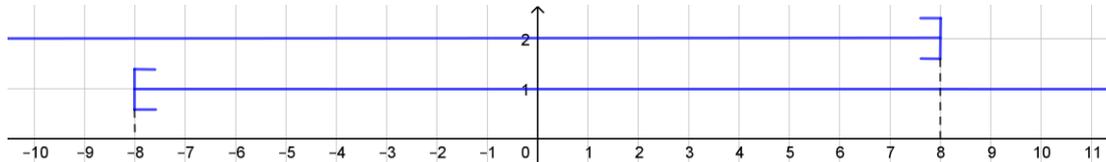
Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$\sqrt{8-x} \leq 4 \Leftrightarrow (\sqrt{8-x})^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 8-x \leq 16 \Leftrightarrow -x \leq 16-8 \Leftrightarrow -x \leq 8$

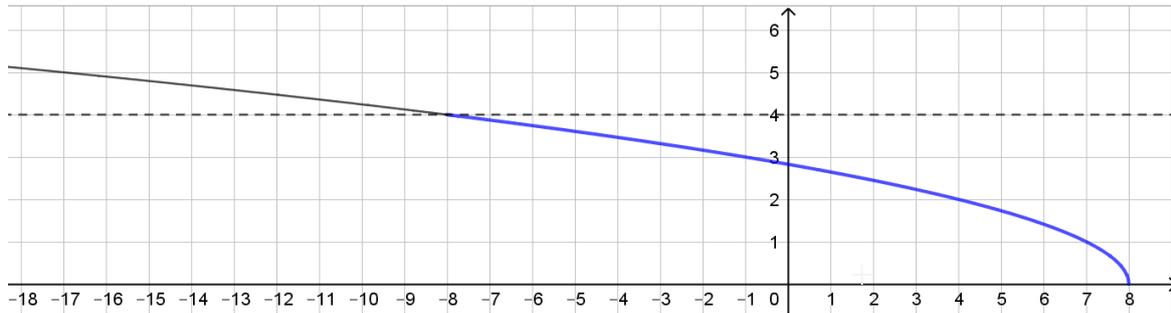
$\Leftrightarrow -x \times (-1) \geq 8 \times (-1) \Leftrightarrow x \geq -8$

→ le domaine de résolution est $D_R = [-8; +\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R = [-8; 8]$



c) $\sqrt{3x-8} \geq -5$

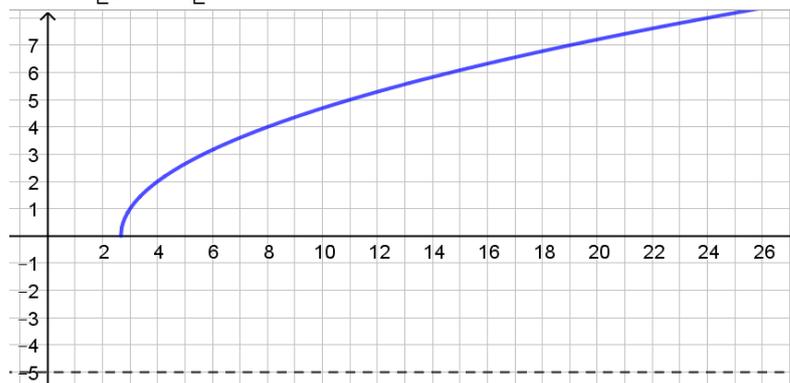
Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

$$\text{Il faut que } 3x-8 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

$$\rightarrow \text{le domaine d'existence des solutions est } D_E = \left[\frac{8}{3}; +\infty \right[$$

Résolution : La résultat d'une racine carrée est toujours positif donc l'inéquation est toujours vérifiée sur son domaine de viabilité.

$$\text{La solution est } S = D_E = \left[\frac{8}{3}; +\infty \right[$$



d) $\sqrt{2+5x} < 9$

Viabilité de la racine carrée : le contenu d'une racine carrée doit être positif ou nul :

$$\text{Il faut que } 2+5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \text{le domaine d'existence des solutions est } D_E = \left[-\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

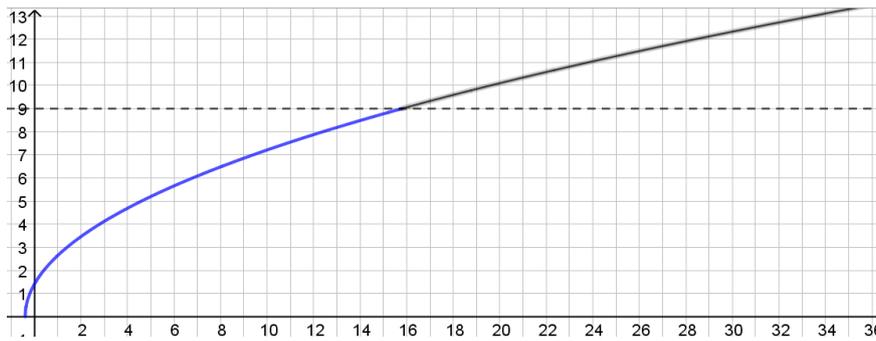
$$\sqrt{2+5x} < 9 \Leftrightarrow (\sqrt{2+5x})^2 < 9^2 \Leftrightarrow 2+5x < 81 \Leftrightarrow 5x < 81-2 \Leftrightarrow 5x < 79$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} < \frac{79}{5} \Leftrightarrow x < \frac{79}{5}$$

$$\rightarrow \text{le domaine de résolution est } D_R = \left] -\infty; \frac{79}{5} \right[$$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S = D_E \cap D_R = \left[-\frac{2}{5}; \frac{79}{5} \right[$$



e) $\sqrt{x-9} \leq 5$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E = [9; +\infty[$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$(\sqrt{x-9})^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow x-9 \leq 25 \Leftrightarrow x \leq 25+9 \Leftrightarrow x \leq 34$$

Donc : $D_R =]-\infty; 34]$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = [9; 34]$$

f) $\sqrt{8-2x} > 3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $8-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x \leq 4$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty; 4]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$(\sqrt{8-2x})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 8-2x > 9 \Leftrightarrow -2x > 9-8 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Donc : $D_R =]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R =]-\infty; -\frac{1}{2}[$$

g) $\sqrt{10-5x} < 4$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E = [9; +\infty[$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$(\sqrt{10-5x})^2 < 4^2 \Leftrightarrow 10-5x < 16 \Leftrightarrow -5x < 16-10 \Leftrightarrow -5x < 6 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{5}$$

Donc : $D_R =]-\frac{6}{5}; +\infty[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R =]-\frac{6}{5}; 2]$$

h) $\sqrt{18-x} \geq 3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $18-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -18 \Leftrightarrow x \leq 18$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty; 18]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$(\sqrt{18-x})^2 \geq 3^2 \Leftrightarrow 18-x \geq 9 \Leftrightarrow -x \geq 9-18 \Leftrightarrow -x \geq -9 \Leftrightarrow x \leq 9$

Donc : $D_R =]-\infty; 9]$

Solution :

$S = D_E \cap D_R =]-\infty; 9]$

Exercices 4.2 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{3-x} - 10 > 6$

Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $3-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow -x \times (-1) \leq -3 \times (-1) \Leftrightarrow x \leq 3$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty; 3]$

Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$2\sqrt{3-x} - 10 > 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{3-x} > 6+10 \Leftrightarrow 2\sqrt{3-x} > 16 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{16}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > 8$

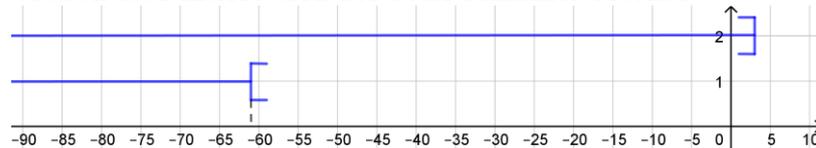
La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$\sqrt{3-x} > 8 \Leftrightarrow (\sqrt{3-x})^2 > 8^2 \Leftrightarrow 3-x > 64 \Leftrightarrow -x > 64-3 \Leftrightarrow -x > 61$

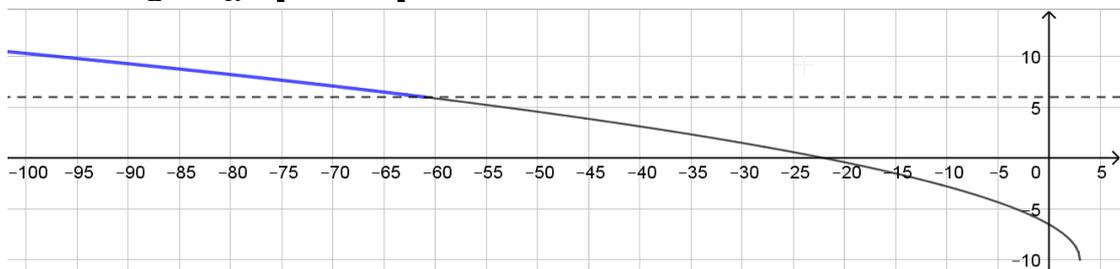
$-x > 61 \Leftrightarrow -x \times (-1) < 61 \times (-1) \Leftrightarrow x < -61$

\rightarrow le domaine de résolution est $D_R =]-\infty; -61[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$S = D_E \cap D_R =]-\infty; -61[$

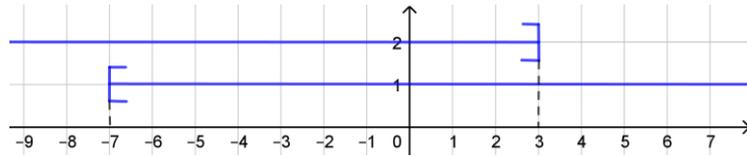


b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0$

Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$

et $6-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-6}{-2} \Leftrightarrow x \leq 3$



→ le domaine d'existence des solutions est $D_E = [-7; 3]$

Résolution :

On isole en priorité chaque racine carrée :

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} \geq \sqrt{6-2x}$$

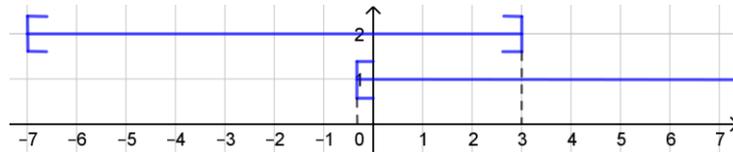
La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{6-2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+7})^2 \geq (\sqrt{6-2x})^2 \Leftrightarrow x+7 \geq 6-2x \Leftrightarrow x+7+2x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 6-7 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

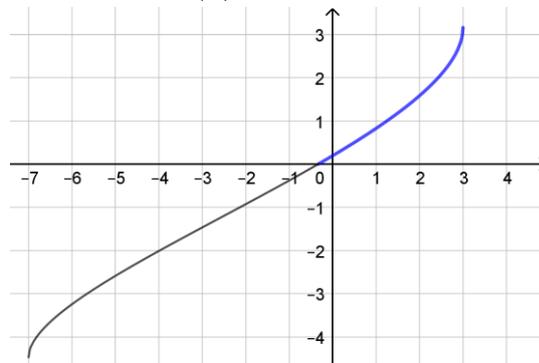
→ le domaine de résolution est $D_R = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$$S = D_E \cap D_R = \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$$

Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{6-2x}$



c) $2\sqrt{5-x} - 5 < 8$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $5-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq 5$

→ le domaine d'existence des solutions est $D_E =]-\infty; 5]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$2\sqrt{5-x} - 5 < 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x} < 8+5 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} < \frac{13}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{5-x})^2 < \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5-x < \frac{169}{4} \Leftrightarrow -x < \frac{169}{4} - 5 \Leftrightarrow -x < \frac{149}{4} \Leftrightarrow -x \times (-1) > \frac{149}{4} \times (-1) \Leftrightarrow x > -\frac{149}{4}$$

Donc : $D_R = \left]-\frac{149}{4}; +\infty\right[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = \left]-\frac{149}{4}; 5\right]$$

d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} > 0$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ et $2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E = [-1; 2]$

Résolution : La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > \sqrt{2-x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 > (\sqrt{2-x})^2 \Leftrightarrow x+1 > 2-x$$

$$\Leftrightarrow x+x > 2-1 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Donc : $D_R = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Solution :

$$S = D_E \cap D_R = \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$$

e) $\sqrt{x-5} - \sqrt{4-2x} < 0$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ et $4-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$

\rightarrow le domaine d'existence des solutions est $D_E = \emptyset$

Il n'y a pas de solution :

$$S = \emptyset$$

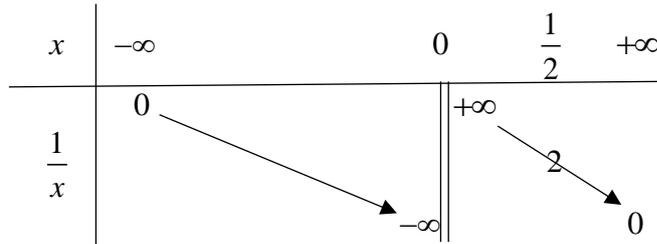
Exercices 4.3 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{\frac{1}{x}-2} > 3$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $\frac{1}{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 2$ et il faut que $\frac{1}{x}$ existe donc $x \neq 0$.

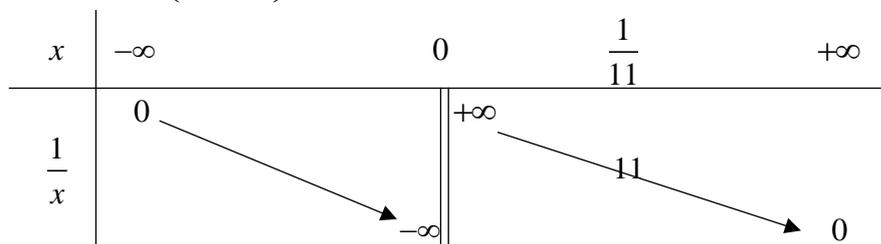


\rightarrow D'après le tableau de variation : $D_E = \left] 0; \frac{1}{2} \right]$

Résolution :

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\sqrt{\frac{1}{x}-2} > 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{x}-2} \right)^2 > 3^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-2 > 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 9+2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 11$$

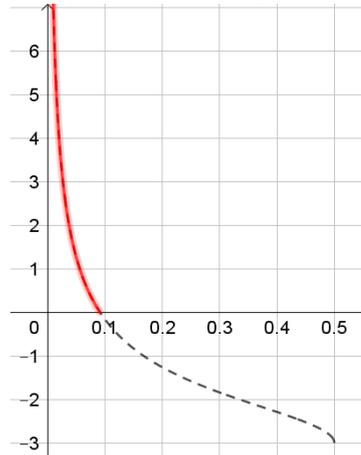


→ le domaine de résolution est $D_R =]0; \frac{1}{11}[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S = D_E \cap D_R =]0; \frac{1}{11}[$$

Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 2 - 3$



b) $2\sqrt{3 + \frac{1}{x}} < 8$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $3 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -3$ et il faut que $\frac{1}{x}$ existe donc $x \neq 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	3	$+\infty$	0

→ D'après le tableau de variation : $D_E =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup]0; +\infty[$

Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$$2\sqrt{3 + \frac{1}{x}} < 8 \Leftrightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{x}} < \frac{8}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{x}} < 4$$

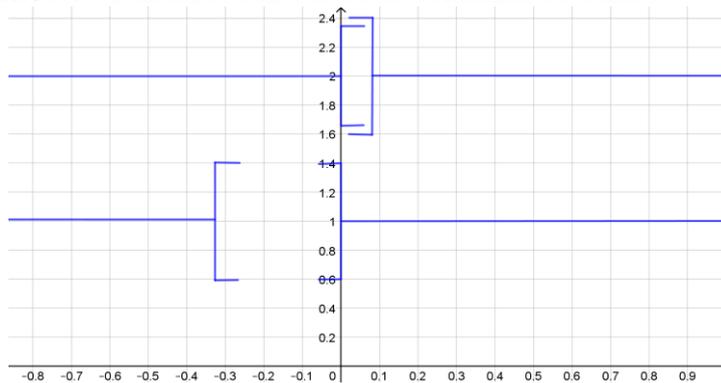
La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\sqrt{3 + \frac{1}{x}} < 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3 + \frac{1}{x}}\right)^2 < 4^2 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} < 16 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 16 - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 13$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{13}$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	13	0

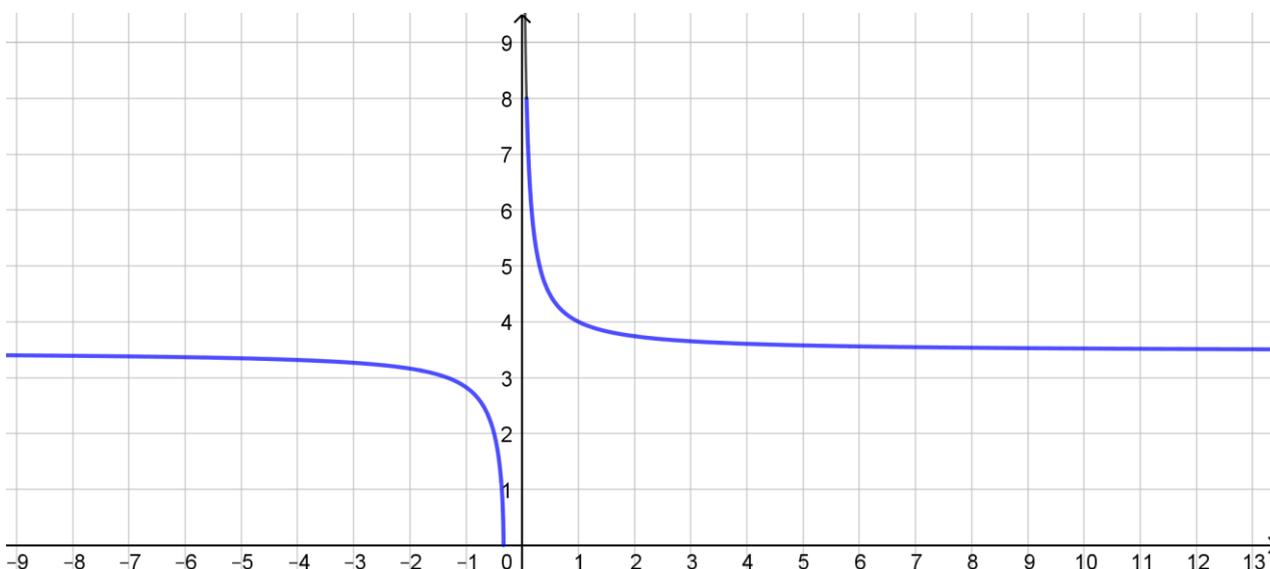
→ le domaine de résolution est $D_R =]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{13}; +\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :



$$S = D_E \cap D_R = \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{13}; +\infty \right[$$

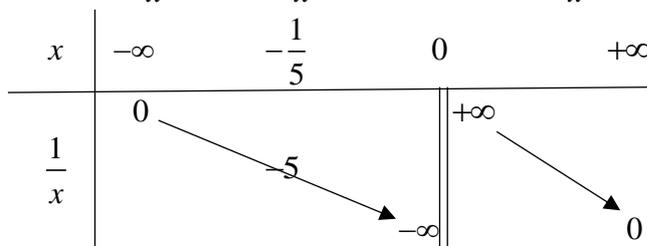
Représentation graphique de la fonction $f(x) = 2\sqrt{3 + \frac{1}{x}}$



c) $2\sqrt{5 + \frac{1}{x}} - 6 < 4$

Domaine d'existence des solutions :

il faut que $5 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -5$ et il faut que $\frac{1}{x}$ existe donc $x \neq 0$.



→ D'après le tableau de variation : $D_E = \left] -\infty; -\frac{1}{5} \right[\cup] 0; +\infty [$

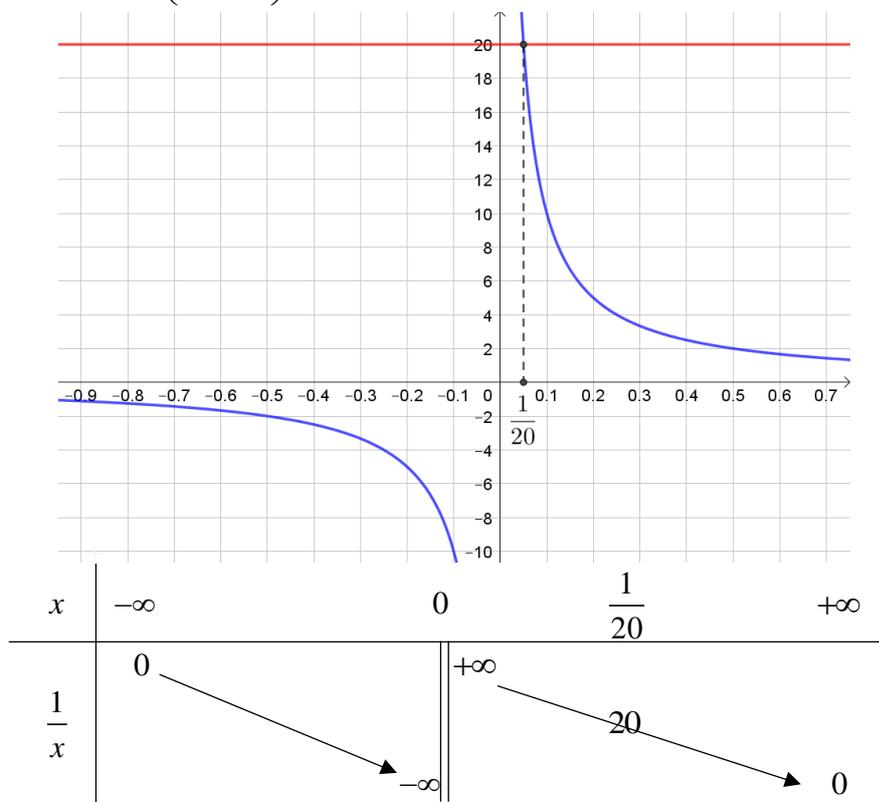
Résolution :

On isole en priorité la racine carrée :

$$2\sqrt{5 + \frac{1}{x}} - 6 < 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{5 + \frac{1}{x}} < 4 + 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{5 + \frac{1}{x}} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{5 + \frac{1}{x}} < \frac{10}{2} \Leftrightarrow \sqrt{5 + \frac{1}{x}} < 5$$

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\sqrt{5+\frac{1}{x}} < 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5+\frac{1}{x}}\right)^2 < 5^2 \Leftrightarrow 5+\frac{1}{x} < 25 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 25-5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 20$$



→ le domaine de résolution est $D_R =]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{20}; +\infty[$

Le domaine solution est l'intersection des deux domaines obtenus :

$$S = D_E \cap D_R =]-\infty; -\frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{20}; +\infty[$$